

10. Честотен анализ. Диаграми на Боде

Честотният анализ на линейни електронни схеми се използва за теоретична оценка на поведението им в установен синусоиден режим. При него на реактивните елементи (кондензатори и бобини) се съпоставят импеданси $Z_C = 1/(j\omega C)$ и $Z_L = j\omega L$, които са чисто имагинерни ($j = \sqrt{-1}$). Въвежда се **комплексна честота** $p = j\omega$. При използването ѝ всеки от първичните или вторичните параметри на една линейна система може да се изрази чрез общия израз:

$$H(p) = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0} = \frac{N(p)}{D(p)},$$
 където a_j и b_j са реални изрази

или числа, зависещи от елементите на схемата. Степента n на знаменателя се нарича **ред на функцията**. Когато $n = 0$, редът на функцията е m . Когато $H(p)$ е предавателна функция, n се нарича **ред на схемата**. Най-често използваните схеми в електрониката са от първи или втори ред ($n = 1$ или 2). Корените на $N(p)$ са нули на $H(p)$ и се означават като z_j , а корените на $D(p)$ са полюси на $H(p)$ и се означават като p_j . И в двата случая корените могат да бъдат реални, k -кратни реални и комплексни (двойки комплексно спрегнати) от типа $(p - z_j)$, $(p - z_j)^k$, $(p^2 + a_{1j}p + a_{0j})$. Следователно всяка функция $H(p)$ може да се представи чрез комбинация от функции от първи и втори ред. За това е достатъчно да се познава поведението на функциите от първи и втори ред.

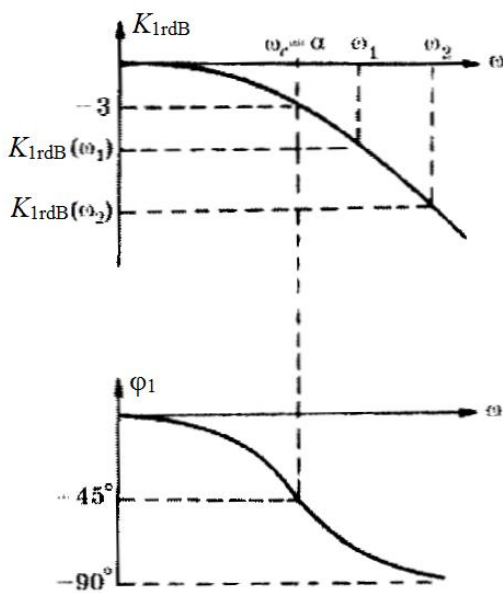
Методът на Боде е най-масово използваният за честотен анализ и е приложим за четириполусници. Анализира се предавателната функция $K(p) = S_2 / S_1$, където S_2 е сигналът на изхода на схемата, а S_1 – синусоиден сигнал с постоянна амплитуда и изменяща се честота на входа на схемата. В общия случай $K(p)$ е комплексна функция с реална част $A(\omega)$ и имагинерна част $B(\omega)$, т.е. $K(p) = A(\omega) + jB(\omega)$ с модул $|K(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$ или в dB $K_{dB}(\omega) = 20 \lg |K(\omega)|$, [dB] и фаза $\varphi(\omega) = \arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$. Графиките на $|K(\omega)|$ и $\varphi(\omega)$ са съответно **амплитудно-честотната характеристика (АЧХ)** и **фазово-честотната характеристика (ФЧХ)** на схемата като четириполусник. Понякога се използва **нормиран модул** $K_r = K(\omega) / K_0$, където K_0 е нормираща константа и **нормирана честота** $\Omega = \omega / \omega_N$, където ω_N е нормираща честота, обикновено характерна за схемата.

Функции от първи ред. Възможни са два варианта:

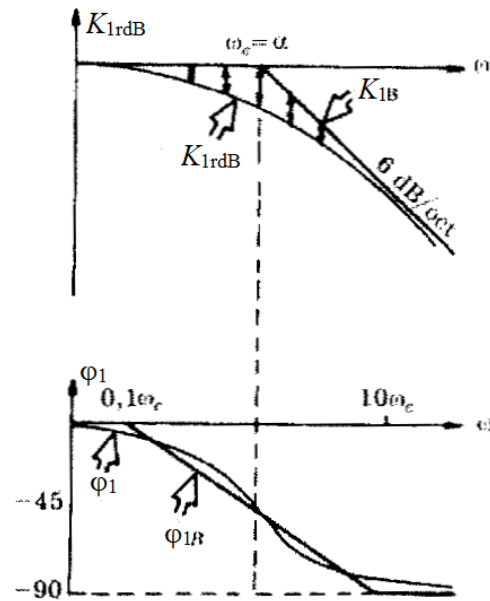
Вариант 1. Предавателна функция $K_1(p) = K_0 / (p/\alpha + 1)$ с модул

$$|K_1(\omega)| = \frac{K_{10}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 + 1}} \quad \text{и фаза} \quad \varphi_1(\omega) = -\arctg \frac{\omega}{\alpha}$$

Нормираните АЧХ и ФЧХ са показани на фиг. 1а. При граничната ъглова честота $\omega_c = \alpha$ модулът $|K_1(\omega_c)| = K_{10} / \sqrt{2}$. Величината $f_c = \omega_c / 2\pi$ е **граничната честота** на предавателната функция на четириполусника. При честота f_c се получава $\varphi_1(f_c) = -45^\circ$.



фиг. 1а



фиг. 1б

За да се оцени изменението на модула $|K_1(\omega)|$ с промяната на честотата се въвежда параметъра **стръмност** S на АЧХ. Обикновено S се изчислява по формулата $S = 20 \lg \frac{K(\omega)}{K(2\omega)}$ и се измерва в децибели на октава [dB/oct], тъй като двукратно изменение на честотата ($\omega \rightarrow 2\omega$) в музиката е една октава. Вместо $K(2\omega)$ може да се използва $K(10\omega)$, при което се получава стръмност в децибели на декада [dB/dec], тъй като десетократно изменение на честотата ($\omega \rightarrow 10\omega$) представлява една декада. Честотния обхват от ω_c до $2\omega_c$ се нарича **първа октава**, от $2\omega_c$ до $4\omega_c$ – **втора октава** и т.н. Модулът на $K_1(\omega)$ при достатъчно високи честоти ($\omega \gg \alpha$) има вида $K_1(\omega) \approx \alpha K_1(0) / \omega$ и съответно $S = 6 \text{ dB/oct}$ или $S = 20 \text{ dB/dec}$.

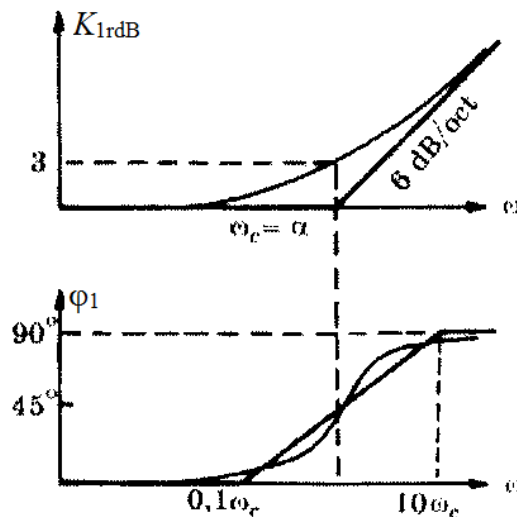
Голямо улеснение при оценка на работата на електронните схеми са **диаграмите на Боде**, които представляват апроксимиращи прави, заменящи АЧХ и ФЧХ. При тях честотата се наннася по абсцисната ос в логаритмичен мащаб. В обхвата от 0 до ω_c АЧХ се заменя с права линия, съвпадаща с абсцисната ос (фиг. 1б) ($K_{1\text{rdB}} = 0 \text{ dB}$), а останалата част (от ω_c до ∞) се заменя с втора права линия, която има стръмност 6 dB/oct . Двете прави образуват **диаграмата на Боде за модула**. При това грешката спрямо реалната АЧХ не надвишава 3 dB . Аналитичният израз на тази апроксимация се дава с:

$$K_{1B} = \begin{cases} 0 & , \omega \leq \omega_c \\ 20 \lg\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right) \text{ dB} & , \omega > \omega_c \end{cases}$$

ФЧХ се замества с три прави, които образуват **диаграмата на Боде за фазата**. Нейното уравнение при логаритмичен мащаб по абсцисната ос е:

$$\varphi_{1B} = \begin{cases} 0^\circ & , \omega \leq 0.1 \omega_c \\ -45^\circ \left[1 + \lg \frac{\omega}{\omega_c} \right] & , 0.1 \omega_c < \omega < 10 \omega_c \\ -90^\circ & , \omega \geq 10 \omega_c \end{cases}$$

Вариант 2. Предавателна функция $K_1(p) = K_0 (p/\alpha + 1)$ с модул $|K_1(\omega)| = K_{10} \sqrt{\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 + 1}$ и фаза $\varphi_1(\omega) = \arctg \frac{\omega}{\alpha}$ има АЧХ и ФЧХ, показани на фиг. 2.



фиг. 2

При граничната ъглова честота $\omega_c = \alpha$ модулет $|K_1(\omega_c)| = K_{10}\sqrt{2}$ или $|K_{1\text{rdB}}(\omega_c)| = +3 \text{ dB}$ и фаза $\varphi_1(\omega_c) = +45^\circ$. При достатъчно високи честоти ($\omega \gg \alpha$) се получава $S = 6 \text{ dB/oct}$. Диаграмите на Боде се описват с изразите:

$$K_{1B} = \begin{cases} 0 & , \omega \leq \omega_c \\ 20 \lg\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \text{ dB} & , \omega > \omega_c \end{cases} \quad \varphi_{1B} = \begin{cases} 0^\circ & , \omega \leq 0.1 \omega_c \\ 45^\circ \left[1 + \lg \frac{\omega}{\omega_c}\right] & , 0.1 \omega_c < \omega < 10 \omega_c \\ 90^\circ & , \omega \geq 10 \omega_c \end{cases}$$

Функции от втори ред. Една от най-често използваните функции в електронните схеми е:

$$K_2(p) = \frac{K_{20}}{b_2 p^2 + b_1 p + 1} = \frac{K_{20}}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2z}{\omega_0} p + 1}, \quad \text{като най-голямо приложение има}$$

втория израз от уравнението, който има следните модул и фаза:

$$|K_2(\omega)| = \frac{K_{20}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4z^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}, \quad \varphi_2(\omega) = \arctg \frac{2z \frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}$$

При $\omega \gg \omega_0$ $|K_2(\omega)| \approx K_{20} (\omega_0/\omega)^2$, т.е. при всяко удвояване на честотата модулет намалява 4 пъти – стръмността на АЧХ е $S = 12 \text{ dB/oct}$.

В зависимост от **коэффициента на потискане** z съществуват три вида полюси на $K_2(p)$.

А. При $z > 1$ има два реални полюса и функцията се записва във вида:

$$K_2(p) = \frac{K_{20}}{\left(\frac{p}{\omega_1} + 1\right)\left(\frac{p}{\omega_2} + 1\right)}, \quad \text{където } \omega_{1,2} = \omega_0(z \mp \sqrt{z^2 - 1}), \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

$K_2(p)$ представлява произведение на две функции от първи ред. АЧХ и ФЧХ са показани на фиг. 3, както и диаграмата на Боде. Граничната честота се

определя от израза $\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2 + \sqrt{(1 - 2z^2)^2 + 1}}$, като $\omega_c < \omega_1$.

Б. При $z = 1$ функцията има реален двоен полюс:

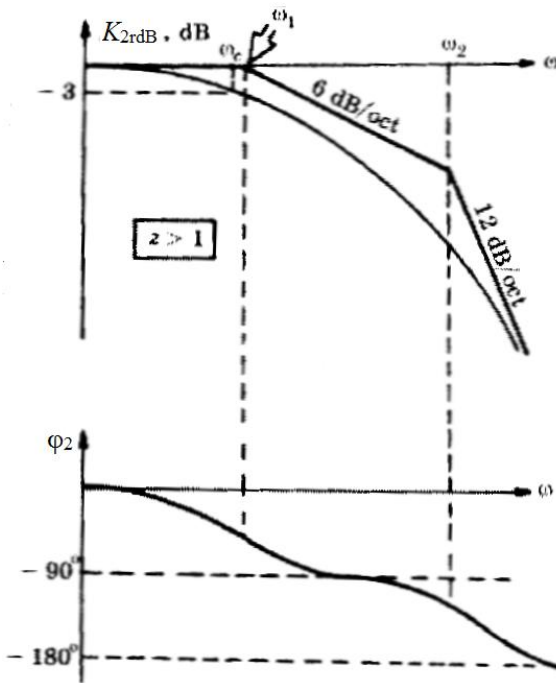
$$K_2(p) = \frac{K_{20}}{\left(\frac{p}{\omega_0} + 1\right)^2}, \quad |K_2(\omega)| = \frac{K_{20}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \quad \varphi_2(\omega) = -2 \arctg \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \text{а}$$

граничната честота е $\omega_c = \omega_0 \sqrt{\sqrt{2} - 1} = 0.644 \omega_0$. АЧХ и ФЧХ са показани на фиг. 4, както и диаграмата на Боде.

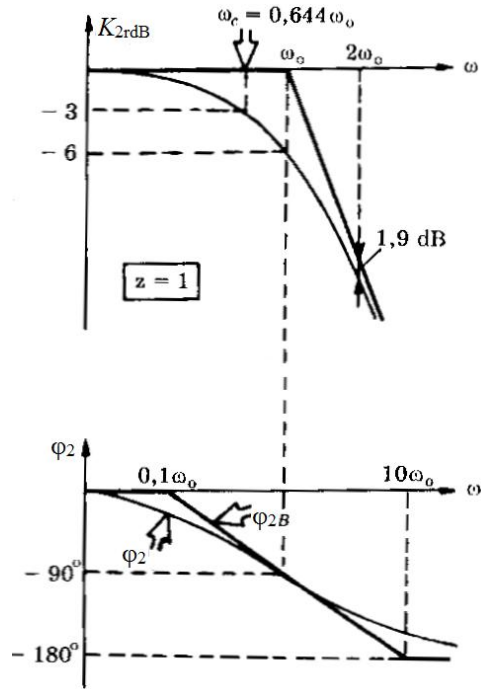
В. При $z < 1$ функцията има комплексно спрегнати полюси

$p_{1,2} = \omega_0(-z \mp j\sqrt{1-z^2})$, а граничната честота отново се дава с

израза $\omega_c = \omega_0\sqrt{1-2z^2 + \sqrt{(1-2z^2)^2 + 1}}$. Особен практически интерес представлява случая $z < 1/\sqrt{2}$, при който АЧХ има отскок. Големината му е

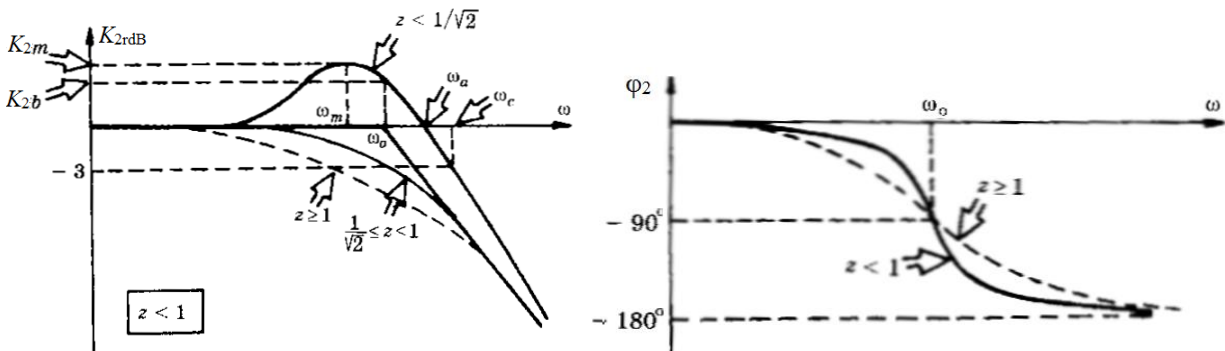


фиг. 3



фиг. 4

$K_{2m} = \frac{K_{20}}{2z\sqrt{1-z^2}}$ при ъгловата честота $\omega_m = \omega_0\sqrt{1-2z^2}$ и нараства с намаляването на z . АЧХ и ФЧХ са показани на фиг. 5, както и диаграмата на Боде.

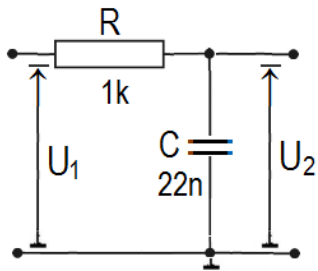


фиг. 5

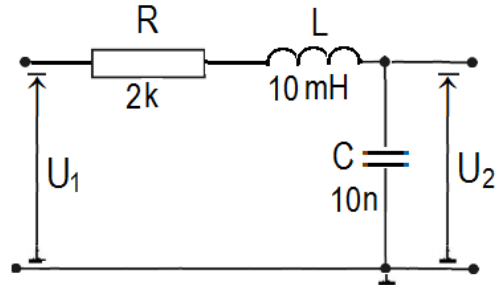
Задачи.

Задача 1. Изследване на звено от първи ред.

Свързва се схемата от фиг. 6. Тя има коефициент на предаване $K(p) = \frac{1}{RCp+1}$ с $K_{\max} = K_0 = 1$ при $p = 0$. На входа на схемата се подава синусоидално напрежение $U_1 = 1V$ с честота $f = 1kHz$. Напрежението на изхода U_2 се мери с цифров волтметър.



фиг. 6



фиг. 7

Да се снемe АЧХ на схемата $K = K(f)$ в честотния диапазон [1kHz ÷ 100kHz] с логаритмична стъпка (1, 2, 5, 10, ..., 50, 100). Да се изчислят стойностите на $K_{rdB} = 20 \lg K$ за всяка стойност на честотата. Да се начертае $K_{rdB} = K_{rdB}(f)$ на полулогаритмична хартия. Да се определи граничната честота f_c ($K_{rdB} = -3 \text{ dB}$) и да се сравни с теоретичната стойност $f_0 = 1/(2\pi RC)$. Да се начертае диаграмата на Боде. Да се определи стръмността в първа октава S_1 и във втора октава S_2 .

Задача 2. Изследване на звено от втори ред.

Да се свърже схемата от фиг. 7. Тя има коефициент на предаване $K(p) = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}$ с $K_{\max} = K_0 = 1$ при $p = 0$. Да се определят стойностите на ω_0 и z . На входа на схемата се подава синусоидално напрежение $U_1 = 1V$ с честота $f = 1kHz$. Напрежението на изхода U_2 се мери с цифров волтметър. Да се снемe АЧХ на схемата $K = K(f)$ в честотния диапазон [1kHz ÷ 100kHz] с логаритмична стъпка (1, 2, 5, 10, ..., 50, 100). Да се изчислят стойностите на $K_{rdB} = 20 \lg K$ за всяка стойност на честотата. Да се начертае $K_{rdB} = K_{rdB}(f)$ на полулогаритмична хартия. Да се определи граничната честота f_c ($K_{rdB} = -3 \text{ dB}$) и да се сравни с теоретичната стойност на f_c . Да се начертае диаграмата на Боде. Да се определи стръмността в първа октава S_1 , във втора октава S_2 и трета октава S_3 .