

# Записки по Теоретична физика -1

## I. Механика

1. Пространство и време в Нютоновата механика. Кинематика на материална точка: закон за движение и траектория. Скорост и ускорение. Кривина на крива, тангенциално и нормално ускорение.

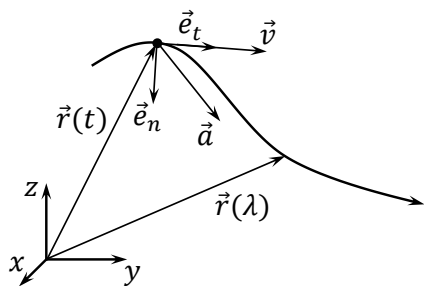
*Материална точка* се нарича тяло, чиито размери могат да се пренебрегнат. Едно и също тяло (например Земята) може да се разглежда по различен начин в зависимост от конкретната задача.

Постулати на Нютон:

1) Пространството, в което се намират телата, е *абсолютно* тримерно Евклидово пространство, т.е. координатната система е външна за механичните явления (свойствата на пространството не зависят от телата в него). Такова пространство е хомогенно (няма особени точки) и изотропно (няма привилегировани направления), т.е. няма значение къде е и как е ориентирана координатната система. В механиката също така е особено важно понятието *отправна система*: това е физическо тяло (система от материални точки), спрямо което може да се опише движението на всички останали тела (координатната система е свързана с това отправно тяло).

2) За описание на явленията се нуждаем и от *абсолютно* време – хомогенно и независимо от това къде се намираме в пространството.

3) Движението на дадена материална точка се извършва по непрекъсната крива, наречена *траектория*. Кривата се задава аналитично в параметрична форма като определим как се изменят координатите на точките от траекторията като функции на даден параметър  $\lambda$ . В декартови координати  $(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$  или векторно  $\vec{r}(\lambda)$ .



Положението на дадена материална точка в някаква отправна система се описва с *радиус-вектор*  $\vec{r}$ , както е показано на фигурата вляво. Основна цел в механиката е да се намери как се изменя радиус-векторът като функция на изминалото време  $t$ . Зависимостта  $\vec{r}(t)$  се нарича *закон за движението*. Важна роля имат също така първата и втората производна по времето на тази зависимост. Изменението

$$\vec{v} := \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

се нарича *скорост* на материалната точка, а величината

$$\vec{a} := \ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

се нарича *ускорение*. В механиката (още от времето на Нютон) е прието производните по времето да се означават с точки над съответната величина, която се диференцира.

Естественят параметър, който параметризира точките от траекторията, е насочената дължина  $s$  на изминатата част от траекторията,<sup>(1)</sup> която съвпада с изминатия от ма-

<sup>(1)</sup> Може да разглеждаме  $s$  като криволинейна координата върху траекторията. Затова траекторията играе

териалната точка път, но само ако движението е еднопосочно. Зависимостта  $s(t)$  играе роля на закон за движението върху траекторията. Ако разгледаме радиус-вектора като функция  $\vec{r}(s)$  на естествения параметър, който от своя страна е функция  $s(t)$  на изминалото време, ще получим съставна функция  $\vec{r}(t) = \vec{r}(s(t))$ . Като диференцираме по времето, за скоростта се получава

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(s(t))}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s}\vec{e}_t, \quad (1)$$

като сме използвали, че производната  $\frac{d\vec{r}}{ds}$  дефинира тангенциалния вектор  $\vec{e}_t$  (с единична дължина) към траекторията. С други думи, скоростта е *винаги* насочена по допирателната към траекторията.

Ускорението

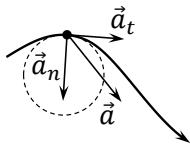
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{s}\vec{e}_t)}{dt} = \ddot{s}\vec{e}_t + \dot{s} \frac{d\vec{e}_t(s(t))}{dt} = \ddot{s}\vec{e}_t + \dot{s}^2 \frac{d\vec{e}_t}{ds}. \quad (2)$$

Като се диференцират двете страни на равенството  $\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t = 1$  по  $s$ , се вижда, че  $\vec{e}_t \cdot \frac{d\vec{e}_t}{ds} = 0$ , т.е.  $\vec{e}_t$  и  $\frac{d\vec{e}_t}{ds}$  са взаимно перпендикулярни. Това позволява да дефинираме нормалния вектор (с единична дължина) към траекторията като

$$\vec{e}_n := \frac{1}{\kappa} \frac{d\vec{e}_t}{ds},$$

където  $\kappa = |d\vec{e}_t/ds|$  се нарича *кривина* на траекторията. Така

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{e}_t + \kappa \dot{s}^2 \vec{e}_n = \ddot{s}\vec{e}_t + \frac{\dot{s}^2 \vec{e}_n}{\rho} = \vec{a}_t + \vec{a}_n, \quad (3)$$



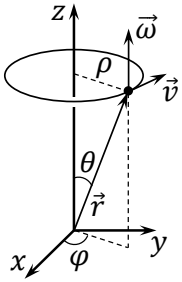
където  $\rho = 1/\kappa$  е радиусът на *оскулачната окръжност*. Това е окръжността, която най-добре се допира до съответната точка от траекторията, както може да се види на фигурата вляво.  $\vec{a}_t = \ddot{s}\vec{e}_t$  се нарича тангенциално ускорение, а  $\vec{a}_n = \dot{s}^2 \vec{e}_n / \rho$  се нарича нормално ускорение.<sup>(2)</sup>

При движението на материалната точка тангенциалното ускорение съответства на промяна на *големината* на скоростта на частицата, а нормалното ускорение задава промяната на *посоката* на скоростта.

роля на *криволинейна абсциса*.

<sup>(2)</sup>Нормалното ускорение е също така центростремително, тъй като е винаги насочено към центъра на съответната оскулачна окръжност.

## 2. Ъглова скорост. Площна скорост.



**Ъглова скорост:** Въртене на дадена материална точка се описва с т.нар. ъглова скорост. За определеност нека да разгледаме въртенето на частица около координатната ос  $Oz$ , т.е. имаме движение по хоризонтална окръжност с определен радиус  $\rho$  (вж. фигурата вляво). Радиус-векторът на материалната точка е удобно да се изрази чрез цилиндричните координати:  $\vec{r}(t) = (\rho \cos \varphi(t), \rho \sin \varphi(t), z)$ . Линейната скорост на частицата е съответно  $\vec{v} = (-\rho \sin \varphi \dot{\varphi}, \rho \cos \varphi \dot{\varphi}, 0)$ . Скоростта може да се представи като векторно произведение:  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ,<sup>(3)</sup> където  $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z$  е ъгловата скорост на материалната точка. Както може да се види на фигурата, ъгълът между  $\vec{\omega}$  и  $\vec{r}$  е  $\theta$ , т.е. големината на линейната скорост има вида

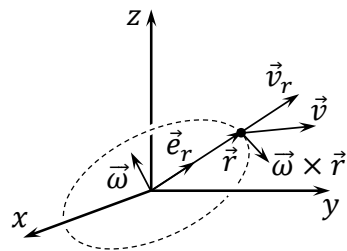
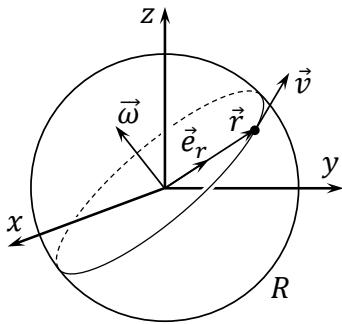
$$v = |\dot{s}| = \rho |\dot{\varphi}| = r \sin \theta |\dot{\varphi}| = \omega r \sin \theta, \quad (4)$$

където  $\omega := |\dot{\varphi}|$  е големината на ъгловата скорост на частицата. В общия случай на въртене около произволна ос по посока на единичния вектор  $\vec{n}$  ъгловата скорост се представя като  $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$ ,  $\omega > 0$ . Винаги се изпълнява правилото на дясната ръка – ако свитите пръсти на ръката са по посока на линейната скорост, то палецът е по посока на ъгловата скорост и вектора  $\vec{n}$ .

В случая на въртенето, описано по-горе, ускорението е

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \dot{s} \vec{e}_t + \frac{\dot{s}^2 \vec{e}_n}{\rho} = \rho \dot{\varphi} \vec{e}_t + \rho \dot{\varphi}^2 \vec{e}_n = \dot{\omega} r \sin \theta \vec{e}_t + \omega^2 r \sin \theta \vec{e}_n. \quad (5)$$

Оттук следва, че тангенциалното ускорение на точката може да се представи във вида  $\vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ , като  $\vec{\varepsilon} := \dot{\vec{\omega}}$  се нарича ъглово ускорение. Също така се вижда, че дори равномерното движение по окръжност е ускорително (има ненулево нормално ускорение).

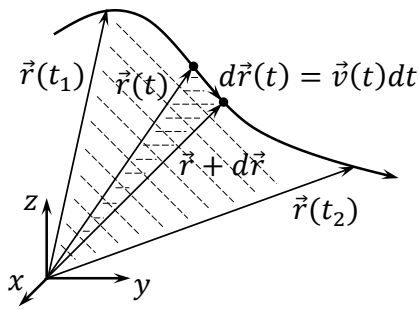


Нека сега да разгледаме произволно движение на материална точка по сфера с радиус  $R$  и център в началото на координатната система (вж. чертежа вляво). Частицата се движи тангенциално на повърхнината, така че във всеки един момент нейното движение може да се опише като въртене по някоя голяма окръжност (окръжност с център, който съвпада с центъра на сферата), т.е. нейната скорост има вида  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ . Радиус-векторът на материалната точка е  $\vec{r}(t) = r \vec{e}_r(t) = R \vec{e}_r(t)$ , където  $\vec{e}_r := \vec{r}/r$  е единичният радиален вектор. Оттук се получава, че  $\dot{\vec{e}}_r = \vec{\omega} \times \vec{e}_r$ . С помощта на последното съотношение може да представим скоростта на произволно движение ( $\vec{r}(t) = r(t) \vec{e}_r(t)$ ) в пространството по следния начин (вж. фигурата вляво):

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r = v_r \vec{e}_r + r \vec{\omega} \times \vec{e}_r = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (6)$$

т.е. скоростта може винаги да се представи като сума от радиална скорост  $\vec{v}_r$  и напречна (на радиус-вектора) скорост  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  (скорост на въртене).

<sup>(3)</sup>Този израз за моментната скорост е валиден само за чисто ротационни движения (въртения).



*Площна скорост:* Разглеждаме траекторията на произволно движеща се материална точка. Искаме да получим израз за т.нар. площна скорост – скоростта на изменение на площта, която “замита” радиус-векторът на точката (вж. чертежа вляво). Може да си мислим за тази площ като за лицето на криволинеен сектор с връх в началото на координатната система.<sup>(4)</sup> За да намерим площната скорост, ще разгледаме безкрайно малко изменение на площта, показано на фигурата с двой-

но заштриховане. Тази малка площ  $d\vec{S}$  представлява лицето на безкрайно тесен триъгълник, заключен между радиус-вектора  $\vec{r}$  и неговото безкрайно малко изменение  $d\vec{r}$  за време  $dt$ . Като използваме геометричната интерпретация на векторното произведение, ще получим:

$$d\vec{S} = \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{2} = \frac{(\vec{r} \times \vec{v})dt}{2}. \quad (7)$$

Оттук следва, като разделим двете страни на  $dt$ , че площната скорост във всеки един момент е

$$\dot{\vec{S}} \equiv \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)}{2}. \quad (8)$$

### 3. Принципи на Нютон. Уравнение на Нютон. Закон за запазване на импулса на материална точка. Принцип на относителността на Галилей.

*Механична система* се нарича всяка съвкупност от материални точки (физическо тяло), които си взаимодействат. *Затворена механична система* се нарича механична система, в която движението на всяка една от точките се извършва само под въздействието на останалите точки (без външно въздействие). *Инерциална отправна система* е отправна система, в която са изпълнени принципите на Нютон (вж. по-долу) и всяко тяло, на което не действат сили, запазва скоростта и посоката си на движение. Системи, движещи се праволинейно и равномерно спрямо инерциална отправна система, са също инерциални.

Нютоновата формулировка на класическата механика се базира на следните три основни принципа (аксиоми).

*I принцип на Нютон:* Съществуват инерциални отправни системи, в които всяко тяло запазва състоянието си на покой или равномерно праволинейно движение при отсъствие на външни сили.

**Коментар** Това противоречи на идеята на Аристотел, че при отсъствие на външни сили телата се стремят към състояние на покой. Принципът е осъзнат и формулиран още от Галилей.

*II принцип на Нютон (уравнение на движение на Нютон):* В инерциални отправни системи ускорението на дадена материална точка е пропорционално на сумарната сила, която ѝ действа:  $\vec{F} = m\vec{a}$ , като  $m$  е масата на материалната точка.

**Коментар** При движение със скорости, сравними със скоростта на светлината във вакуум, Нютоновата механика престава да бъде валидна, а II принцип в горната си формули-

<sup>(4)</sup>Строго погледнато, ще работим със съответната насочена (векторна) площ. В общия случай на непланарна повърхнина големината на векторната площ е по-малка от обикновената (скаларна) площ. За затворени повърхнини, каквито тук няма да разглеждаме, векторната площ е винаги нулева.

ровка не е верен.<sup>(5)</sup> За да е валиден II принцип при произволни скорости, трябва да се използва във вида:  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ , където  $\vec{p} := m\vec{v}$  е *импулсът* на материалната точка.

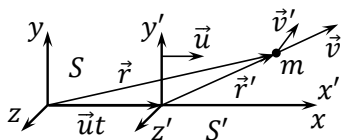


**III принцип на Нютон:** Силите на взаимодействие между две материални точки са равни по големина и противоположни по посока, като са насочени по съединителната права между точките:  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ , като с  $\vec{F}_{12}$  е означена

силата, с която втората частица действа на първата, а с  $\vec{F}_{21}$  е означена силата, с която първата частица действа на втората.

**Закон за запазване на импулса на материална точка:** Ако сумарната сила  $\vec{F}$ , която действа на една материална точка в инерциална отправна система, е нула, тогава от II принцип на Нютон:  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = 0$ . Следователно  $\vec{p} = \text{const}$  (импулсът на материалната точка се запазва).<sup>(6)</sup>

**Принцип на относителността на Галилей:** Законите на механиката са еднакви във всички инерциални отправни системи, т.е. уравнението на движение на Нютон има един и същ вид във всяка инерциална отправна система.



**Трансформации на Галилей:** Нека да разгледаме две инерциални отправни системи  $S$  и  $S'$ . Втората се движи спрямо първата със скорост  $\vec{u}$ , както е показано на фигурата вляво. Радиус-векторите на дадена материална точка спрямо двете инерциални отправни системи са свързани по следния начин (трансформация на Галилей):

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t, \quad (9)$$

като за простота считаме, че двете отправни системи са на едно и също място в началния момент. Величините, които характеризират движението на частицата спрямо отправната система  $S$ , са непримовани, а величините спрямо  $S'$  са примовани. Като диференцираме горното равенство по времето, ще получим закона за събиране на скоростите в Нютоновата (нерелативистка) механика:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}. \quad (10)$$

След още едно диференциране се получава, че  $\vec{a} = \vec{a}'$ . Масата на частицата е константа, а сумарната сила е една и съща във всички инерциални отправни системи, т.е.  $\vec{F} = \vec{F}'$ . Оттук следва, че уравнението на движение (на Нютон) действително е инвариантно при преход от една инерциална отправна система към друга (не се променя при трансформации на Галилей). Освен при тези трансформации, уравненията на движение се запазват и при трансляции и ротации, което отразява хомогенността и изотропността на Нютоновото абсолютно пространство.

**Коментар** Съвкупността от всички тези преобразования на отправните системи формира *групата на Галилей*. Механичните закони съвпадат във всички инерциални отправни системи, които са свързани помежду си с преобразования от групата на Галилей. Оттук следват и свойствата на абсолютното пространство, възприето и наложено от Нютон: няма привилегирани точки в пространството (хомогенност) и няма привилегирова-

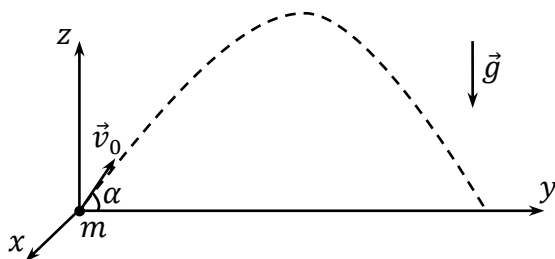
<sup>(5)</sup>Правилната теория в подобни случаи е специалната теория на относителността.

<sup>(6)</sup>Запазващите се величини в механиката са свързани със симетрии на пространството и времето. Те опростяват решаването на уравненията на движение, тъй като се намалява реда на системата от ОДУ на движение.

ни направления (изотропност). Трансформациите на Галилей ни показват също така, че няма привилегировани скорости. Това схващане е оборено от специалната теория на относителността (скоростта на светлината във вакуум има фундаментално значение).

**Основни видове сили** Нека да разгледаме някои от основните видове сили, които се срещат в механиката. Първо ще се концентрираме върху силата на тежестта, като я комбинираме и с някои сили на съпротивление. След това ще видим какво се случва под действието на еластична сила, а накрая ще анализираме движението на частици в хомогенно магнитно поле.

*Движение на тяло в полето на силата на тежестта:* В нерелативистката физика гравитационното взаимодействие се описва със закона на Нютон, който гласи, че големината на силата между две материални точки е пропорционална на техните маси и обратно пропорционална на квадрата на разстоянието между тях. Близо до повърхността на Земята този закон се свежда до хомогенно поле, т.е. константна сила на тежестта  $\vec{G} = m\vec{g}$ , която зависи само от масата на тялото и земното ускорение.



Нека да разгледаме материална точка с маса  $m$ , която е хвърлена под ъгъл  $\alpha$  спрямо хоризонта със скорост  $\vec{v}_0$  (вж. фигурата вляво). Координатната система е така избрана, че в началния момент тялото се намира в началото на координатната система ( $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = 0$ ), а оста  $Oz$  е насочена вертикално нагоре, т.е. векторът на земното

ускорение  $\vec{g} = (0, 0, -g)$ . Началната скорост е  $\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = (0, v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$ , т.е. материалната точка се движи във вертикалната равнина  $x = 0$ . Уравнението на Нютон е  $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}$ . След двукратно интегриране на уравнението получаваме

$$\vec{r}(t) = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}. \quad (11)$$

Като наложим началните условия  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$  и  $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0$ , ще получим

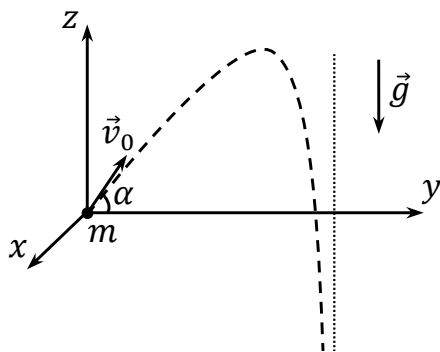
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}. \quad (12)$$

По компоненти законът за движение изглежда така:

$$x(t) = 0, \quad y(t) = v_0 \cos \alpha t, \quad z(t) = v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}. \quad (13)$$

Траекторията (парабола) се получава като се изключи  $t$  от последните две уравнения:

$$z(y) = y \tan \alpha - \frac{gy^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (14)$$



*Движение на тяло в полето на силата на тежестта при наличие на Стоксова сила на съпротивление:* Разглеждаме материална точка с маса  $m$ , която е хвърлена с начална скорост  $\vec{v}_0 = (0, v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$ . Избрали сме така координатната система, че в началния момент тялото да се намира в началото ( $\vec{r}_0 = 0$ ), а оста  $Oz$  да е насочена вертикално нагоре, т.е. векторът на земното ускорение е  $\vec{g} = (0, 0, -g)$ . Стоксовата сила на съпротивление има вида  $\vec{F}_{\text{сърп}} = -b\vec{v}$ , където  $b > 0$  е коефициент на

съпротивление, който зависи от размерите на тялото и от вискозитета на средата. Уравнението на Нютон е  $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - b\dot{\vec{r}}$ . Това е нехомогенно ОДУ с постоянни коефициенти, което ще решим по метода на Ойлер. За да намерим общото решение на хомогенното уравнение, полагаме  $\vec{r} = \vec{C}e^{\lambda t}$  и заместваваме:

$$(m\lambda^2 + b\lambda)\vec{C}e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda(m\lambda + b) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -b/m. \quad (15)$$

Общото решение е:

$$\vec{r}_{\text{хом}} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 e^{-bt/m}. \quad (16)$$

Частно решение на нехомогенното уравнение е, например,  $\vec{r}_\text{ч} = m\vec{g}t/b$ . Така получаваме за общото решение на нехомогенното уравнение:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{\text{хом}} + \vec{r}_\text{ч} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 e^{-bt/m} + m\vec{g}t/b. \quad (17)$$

Като наложим началните условия  $\vec{r}(0) = 0$  и  $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0$ , ще получим

$$\vec{r}(t) = \frac{m}{b} \left( \vec{v}_0 - \frac{m\vec{g}}{b} \right) (1 - e^{-bt/m}) + \frac{m\vec{g}t}{b}. \quad (18)$$

По компоненти законът за движение изглежда така:

$$x(t) = 0, \quad y(t) = \frac{mv_0 \cos \alpha}{b} (1 - e^{-bt/m}), \quad z(t) = \frac{m}{b} \left( v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{b} \right) (1 - e^{-bt/m}) - \frac{mgt}{b}. \quad (19)$$

Траекторията (балистична крива) е по-сложна от парабола, като може да се забележи наличието на вертикална асимптота. Когато е изминало много дълго време след началото на движението ( $t \gg m/b$ ), експонентата става практически равна на нула и хоризонталното положение на частицата не се изменя ( $y(t) \approx mv_0 \cos \alpha/b$ ), т.е. има само равномерно падане:

$$z(t) \approx \frac{m}{b} \left( v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{b} \right) - \frac{mgt}{b}, \quad (20)$$

с крайна скорост  $v_\infty = mg/b$ , която съществено зависи от свойствата на тялото.

Нека сега да анализираме характера на движението, когато е изминало малко време след началото на движението ( $t \ll m/b$ ). Като развием експонентата в ред на Маклорен,

законът за движение (18) става:

$$\vec{r}(t) \approx \frac{m}{b} \left( \vec{v}_0 - \frac{m\vec{g}}{b} \right) \left( 1 - 1 + \frac{bt}{m} - \frac{b^2 t^2}{2m^2} \right) + \frac{m\vec{g}t}{b} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} - \frac{b\vec{v}_0 t^2}{2m} \approx \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}, \quad (21)$$

т.е. получава се закона за движение (12) в случая без съпротивление.

*Движение на тяло в полето на силата на тежестта при наличие на квадратична по скоростта сила на съпротивление:* Нека отново да разгледаме движението на частица в полето на силата на тежестта, но в този случай искаме силата на съпротивление да е квадратична по скоростта на движение на частицата:  $\vec{F}_{\text{съпр}} = -\gamma v \vec{v}$ , където  $\gamma > 0$  отново се нарича коефициент на съпротивление. При движението на телата във въздух се реализира точно този случай. Нека първо да видим какво се случва, когато тяло с маса  $m$  пада надолу без начална скорост. За простота ще разгледаме само движението във вертикално направление. Уравнението на движение по  $z$  оста е  $m\dot{v}_z = -mg + \gamma v_z^2$ . Това е уравнение с разделящи се променливи:

$$t = \int_0^t dt = - \int_0^{v_z} \frac{dv_z}{g - \gamma v_z^2/m}. \quad (22)$$

Този интеграл може да се реши със субституцията  $v_z = \sqrt{mg/\gamma} \tanh u$ :

$$t = - \sqrt{\frac{m}{\gamma g}} \int_0^u \frac{du}{\cosh^2 u (1 - \tanh^2 u)} = - \sqrt{\frac{m}{\gamma g}} \int_0^u du = - \sqrt{\frac{m}{\gamma g}} u. \quad (23)$$

Съответно

$$v_z(t) = - \sqrt{\frac{mg}{\gamma}} \tanh \left( \sqrt{\frac{\gamma g}{m}} t \right). \quad (24)$$

Лесно се вижда, че скоростта не расте неограничено като в случая без съпротивление. Тялото достига крайна (максимална) скорост<sup>(7)</sup>

$$v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{\gamma}}. \quad (25)$$

Нека сега да анализираме случая, когато тяло е хвърлено нагоре с начална скорост  $v_0$ . Уравнението на движение по  $z$  става  $m\dot{v}_z = -mg - \gamma v_z^2$ . Искаме да намерим максималната височина  $h_{\text{max}}$  на издигане на тялото. За тази цел ни трябва зависимостта  $v_z(z)$ :

$$\dot{v}_z = \frac{dv_z}{dz} \frac{dz}{dt} = v_z \frac{dv_z}{dz} = \frac{1}{2} \frac{d(v_z^2)}{dz} = -g - \frac{\gamma v_z^2}{m}. \quad (26)$$

Нека да положим  $w = v_z^2$  и да интегрираме това ОДУ с разделящи се променливи:

$$2 \int_0^{h_{\text{max}}} dz = - \int_{v_0^2}^0 \frac{dw}{g + \gamma w/m} = \int_0^{v_0^2} \frac{dw}{g + \gamma w/m} \Rightarrow 2h_{\text{max}} = \frac{m}{\gamma} \ln \left( g + \frac{\gamma w}{m} \right) \Big|_{w=0}^{w=v_0^2}, \quad (27)$$

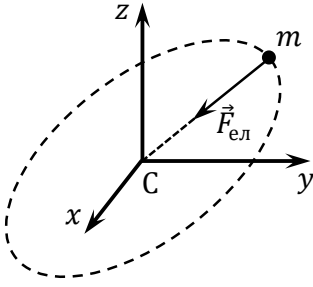
<sup>(7)</sup>Коефициентът на съпротивление  $\gamma$  е пропорционален на напречната площ на тялото. Затова, например, парашутите трябва да са достатъчно големи, за да може крайната скорост да бъде безопасно малка.

откъдето

$$h_{\max} = \frac{m}{2\gamma} \ln \left( 1 + \frac{\gamma v_0^2}{mg} \right). \quad (28)$$

Нека да намерим първата поправка към резултата, който се получава за максималната височина на издигане, в случая без съпротивление. Трябва да развием логаритъма в ред на Тейлър около едно:

$$h_{\max} \approx \frac{m}{2\gamma} \left( \frac{\gamma v_0^2}{mg} - \frac{\gamma^2 v_0^4}{2m^2 g^2} \right) = \frac{v_0^2}{2g} \left( 1 - \frac{\gamma v_0^2}{2mg} \right). \quad (29)$$



*Движение на тяло под действието на еластична сила (примерен хармоничен осцилатор):* Нека сега да разгледаме материална точка с маса  $m$ , която има начално положение, което се описва с радиус-вектора  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ , и начална скорост  $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ . Може да изберем така координатната система, че центърът на еластичната сила  $\vec{F}_{\text{ел}} = -k(\vec{r} - \vec{r}_C)$  да се намира в началото на координатната система ( $\vec{r}_C = 0$ ). Уравнението на Нютон е  $m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}$ , като  $k > 0$  се нарича коефициент на еластичност. Знакът “-” показва, че еластичната сила действа винаги обратно на посоката на радиус-вектора. Това

е хомогенно векторно диференциално уравнение от втори ред, което ще решим по метода на Ойлер. Търсим решението във вида  $\vec{r} = \vec{C}e^{\lambda t}$  и го заместваем в уравнението:

$$(m\lambda^2 + k)\vec{C}e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0, \quad \omega = \sqrt{k/m}, \quad (30)$$

като  $\omega$  се нарича кръгова честота. Оттук  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$  и общото решение на уравнението е:

$$\vec{r}(t) = \vec{C}_1 e^{i\omega t} + \vec{C}_2 e^{-i\omega t} = \vec{A} \cos \omega t + \vec{B} \sin \omega t, \quad (31)$$

където векторите  $\vec{C}_1$  и  $\vec{C}_2$  са комплексно спрегнати,  $\vec{A} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2$ , а  $\vec{B} = i(\vec{C}_1 - \vec{C}_2)$ . Като наложим началните условия  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$  и  $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0$ , ще получим закона за движение:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cos \omega t + \frac{\vec{v}_0}{\omega} \sin \omega t, \quad (32)$$

т.е. движението се изразява чрез тригонометрични функции. Може да се покаже, че траекторията на материалната точка е елипса в общия случай.

*Движение на тяло под действието на еластична сила и Стоксова сила на съпротивление:* Нека да разгледаме материална точка с маса  $m$ , която има начално положение  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$  и начална скорост  $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ . Избираме така координатната система, че центърът на еластичната сила  $\vec{F}_{\text{ел}} = -k(\vec{r} - \vec{r}_C)$  да се намира в началото на координатната система ( $\vec{r}_C = 0$ ). Уравнението на Нютон е  $m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} - b\dot{\vec{r}}$ , като  $k > 0$  е коефициентът на еластичност, а  $b > 0$  е коефициентът на съпротивление. Това е хомогенно векторно диференциално уравнение от втори ред, което ще решим отново по метода на Ойлер. Търсим решението във вида  $\vec{r} = \vec{C}e^{\lambda t}$  и го заместваем в уравнението:

$$(m\lambda^2 + b\lambda + k)\vec{C}e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\kappa\lambda + \omega^2 = 0, \quad \kappa = \frac{b}{2m}, \quad \omega = \sqrt{k/m}. \quad (33)$$

Оттук  $\lambda_{1,2} = -\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - \omega^2}$ . В зависимост от знака на дискриминантата на характеристичното уравнение се наблюдават три случая:

1) Ако  $\kappa < \omega$ , характеристичните корени са комплексно спрегнати и механичната система извършва затихващи трептения с кръгова честота  $\hat{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \kappa^2} < \omega$ . Общото решение на диференциалното уравнение е

$$\vec{r}(t) = e^{-\kappa t} (\vec{C}_1 e^{i\hat{\omega}t} + \vec{C}_2 e^{-i\hat{\omega}t}) = e^{-\kappa t} (\vec{A} \cos \hat{\omega}t + \vec{B} \sin \hat{\omega}t), \quad (34)$$

където векторите  $\vec{C}_1$  и  $\vec{C}_2$  отново са комплексно спрегнати,  $\vec{A} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2$ , а  $\vec{B} = i(\vec{C}_1 - \vec{C}_2)$ . Като наложим началните условия  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$  и  $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0$ , ще получим закона за движение:

$$\vec{r}(t) = e^{-\kappa t} \left( \vec{r}_0 \cos \hat{\omega}t + \frac{\vec{v}_0 + \kappa \vec{r}_0}{\hat{\omega}} \sin \hat{\omega}t \right), \quad (35)$$

т.е. има експоненциално затихващо трептене.

2) Ако  $\kappa = \omega$ , има двоен характеристичен корен  $\lambda_{1,2} = -\kappa$ , при което общото решение става:

$$\vec{r}(t) = e^{-\kappa t} (\vec{C}_1 + \vec{C}_2 t). \quad (36)$$

При налагане на началните условия:

$$\vec{r}(t) = e^{-\kappa t} [\vec{r}_0 + (\vec{v}_0 + \kappa \vec{r}_0)t]. \quad (37)$$

3) Ако  $\kappa > \omega$ , характеристичните корени са реални:

$$\vec{r}(t) = e^{-\kappa t} (\vec{C}_1 e^{\sqrt{\kappa^2 - \omega^2}t} + \vec{C}_2 e^{-\sqrt{\kappa^2 - \omega^2}t}) = e^{-\kappa t} [\vec{A} \cosh(\sqrt{\kappa^2 - \omega^2}t) + \vec{B} \sinh(\sqrt{\kappa^2 - \omega^2}t)], \quad (38)$$

където  $\vec{A} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2$ , а  $\vec{B} = \vec{C}_1 - \vec{C}_2$ . Като наложим началните условия  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$  и  $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0$ , ще получим закона за движение:

$$\vec{r}(t) = e^{-\kappa t} \left( \vec{r}_0 \cosh(\sqrt{\kappa^2 - \omega^2}t) + \frac{\vec{v}_0 + \kappa \vec{r}_0}{\sqrt{\kappa^2 - \omega^2}} \sinh(\sqrt{\kappa^2 - \omega^2}t) \right), \quad (39)$$

което представлява чисто експоненциално затихване.

*Движение на заредена частица в хомогенно магнитно поле:* Частица със заряд  $q > 0$  и маса  $m$  се движи в магнитно поле с индукция  $\vec{B} = \text{const}$ . Може да изберем координатната система така, че полето да е насочено по посока на оста  $Oz$ , т.е.  $\vec{B} = (0, 0, B)$ ,  $B > 0$ . От II принцип на Нютон получаваме, че

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = q \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = (qBv_y, -qBv_x, 0). \quad (40)$$

Нека за простота да приемем, че  $z(0) = 0$  и  $v_z(0) = 0$ , т.е. нямаме движение по  $z$ . За да улесним решаването на задачата, ще въведем комплексна скорост от вида  $\tilde{v} = v_x + iv_y$ . Получаваме, че

$$m\dot{\tilde{v}} = m\dot{v}_x + im\dot{v}_y = qBv_y - iqBv_x = -iqB\tilde{v}, \quad (41)$$

което представлява ОДУ с разделящи се променливи:

$$\frac{d\tilde{v}}{\tilde{v}} = -\frac{iqBdt}{m} \Rightarrow \ln \tilde{v} = -\frac{iqBt}{m} + \ln \tilde{C} = -i\omega_c t + \ln \tilde{C} \Rightarrow \tilde{v} = \tilde{C}e^{-i\omega_c t}, \quad (42)$$

като сме въвели комплексна константа  $\tilde{C} = C_1 + iC_2$  и параметъра  $\omega_c = qB/m$ , който се нарича циклотронна честота. Нека да разпишем последното равенство:

$$v_x + iv_y = (C_1 + iC_2)(\cos \omega_c t - i \sin \omega_c t), \quad (43)$$

откъдето

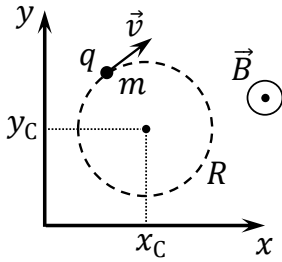
$$v_x = C_1 \cos \omega_c t + C_2 \sin \omega_c t, \quad v_y = -C_1 \sin \omega_c t + C_2 \cos \omega_c t. \quad (44)$$

Като наложим началните условия  $v_x(0) = v_{0x}$  и  $v_y(0) = v_{0y}$ , ще получим

$$v_x = v_{0x} \cos \omega_c t + v_{0y} \sin \omega_c t, \quad v_y = -v_{0x} \sin \omega_c t + v_{0y} \cos \omega_c t. \quad (45)$$

Като интегрираме последните две уравнения по времето, се получават следните закони за движение:

$$x(t) = \frac{1}{\omega_c}(v_{0x} \sin \omega_c t - v_{0y} \cos \omega_c t) + x_c, \quad y(t) = \frac{1}{\omega_c}(v_{0x} \cos \omega_c t + v_{0y} \sin \omega_c t) + y_c, \quad (46)$$



където  $x_c$  и  $y_c$  са константи, които се определят от началните условия. За да намерим траекторията, нека да разгледаме израза

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = \frac{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}{\omega_c^2} = R^2, \quad (47)$$

т.е. частицата се движи с ъглова скорост  $\omega_c$  в равнината  $z = 0$  по окръжност с радиус  $R$  и център в точката с координати  $(x_c, y_c)$ , както е показано на фигурата вляво.

*Движение на заредена частица в хомогенни и взаимно перпендикулярни електрично и магнитно полета:* Частица със заряд  $q > 0$  и маса  $m$  се движи в електрично поле с интензитет  $\vec{E} = \text{const}$  и магнитно поле с индукция  $\vec{B} = \text{const}$ , като  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  са взаимно перпендикулярни. Може да изберем така координатната система, че електричното поле да е  $\vec{E} = (E, 0, 0)$ , а магнитното поле да е насочено по оста  $Oz$ , т.е.  $\vec{B} = (0, 0, B)$ ,  $B > 0$ . Нека за простота да приемем, че  $\vec{r}(0) = 0$  и  $\vec{v}(0) = 0$ , т.е. движението ще се извършва в равнината  $z = 0$ . От II принцип на Нютон получаваме, че

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = qE\vec{e}_x + q \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = (qE + qBv_y, -qBv_x, 0). \quad (48)$$

За да улесним решаването на задачата, отново ще въведем комплексна скорост от вида  $\tilde{v} = v_x + iv_y$ . Получаваме, че

$$m\dot{\tilde{v}} = m\dot{v}_x + im\dot{v}_y = qE + qBv_y - iqBv_x = qE - iqB\tilde{v}, \quad (49)$$

което представлява нехомогенно ОДУ от първи ред с постоянни коефициенти. Общото

му решение е сума от общото решение на хомогенното уравнение (42) и частно решение на нехомогенното уравнение:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{хом}} + \vec{v}_q = \tilde{C} e^{-i\omega_c t} - iE/B, \quad (50)$$

като отново сме въвели комплексна константа  $\tilde{C} = C_1 + iC_2$  и циклотронната честота  $\omega_c = qB/m$ . Нека да разпишем последното равенство:

$$v_x + iv_y = (C_1 + iC_2)(\cos \omega_c t - i \sin \omega_c t) - iE/B, \quad (51)$$

откъдето

$$v_x = C_1 \cos \omega_c t + C_2 \sin \omega_c t, \quad v_y = -C_1 \sin \omega_c t + C_2 \cos \omega_c t - E/B. \quad (52)$$

Като наложим началните условия  $v_{x,y}(0) = 0$ , ще получим:

$$v_x = \frac{E}{B} \sin \omega_c t, \quad v_y = \frac{E}{B} (\cos \omega_c t - 1). \quad (53)$$

Като интегрираме последните две уравнения по времето и наложим началните условия  $x(0) = y(0) = 0$ , се получават законите за движение:

$$x(t) = \frac{E}{\omega_c B} (1 - \cos \omega_c t), \quad y(t) = \frac{E}{\omega_c B} (\sin \omega_c t - \omega_c t). \quad (54)$$

За да намерим траекторията, нека да разгледаме израза

$$\left(x - \frac{E}{\omega_c B}\right)^2 + \left(y + \frac{Et}{B}\right)^2 = \frac{E^2}{\omega_c^2 B^2}, \quad (55)$$

т.е. частицата ще се движи по циклоида в равнината  $z = 0$  (вж. фигурата вляво).

*Движение на заредена частица под действието на еластична сила в хомогенно магнитно поле:* Нека да разгледаме материална точка с маса  $m$  и заряд  $q > 0$ , на която действа еластична сила  $\vec{F}_{\text{ел}} = -k\vec{r}$  (координатната система е избрана така, че центърът на силата съвпада с началото на координатната система) и магнитна сила  $\vec{F}_{\text{маг}} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ . Оттук

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} + q(\vec{v} \times \vec{B}) = -k(x, y, z) + (qB\dot{y}, -qB\dot{x}, 0). \quad (56)$$

Използвами сме такава ориентация на координатната система, че магнитното поле да е насочено по оста  $Oz$ , т.е.  $\vec{B} = (0, 0, B)$ ,  $B > 0$ . За простота ще приемем, че  $z(0) = 0$  и  $\dot{z}(0) = 0$ , т.е. нямаме движение по  $Oz$ . За да улесним решаването на задачата, ще въведем комплексна координата от вида  $\tilde{r} = x + iy$ . Получаваме, че

$$m\ddot{\tilde{r}} = m\ddot{x} + im\ddot{y} = -kx - iky + qB\dot{y} - iqB\dot{x} = -k\tilde{r} - iqB\dot{\tilde{r}}, \quad (57)$$

което представлява линейно ОДУ с постоянни коефициенти. Като разделим на  $m$ :

$$\ddot{\tilde{r}} + i\omega_c \dot{\tilde{r}} + \omega^2 \tilde{r} = 0, \quad (58)$$

където  $\omega_c = qB/m$  е циклотронната честота, а  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Характеристичното уравнение е  $\lambda^2 + i\omega_c\lambda + \omega^2 = 0$ . Характеристичните корени са  $\lambda_1 = i\Omega_1$  и  $\lambda_2 = -i\Omega_2$ , където

$$\Omega_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{\omega_c^2 + 4\omega^2} - \omega_c), \quad \Omega_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{\omega_c^2 + 4\omega^2} + \omega_c). \quad (59)$$

Общото решение на (58) е

$$\vec{r} = \vec{C}e^{i\Omega_1 t} + \vec{D}e^{-i\Omega_2 t}, \quad (60)$$

като сме въвели комплексните константи  $\vec{C} = C_1 + iC_2$  и  $\vec{D} = D_1 + iD_2$ . След приравняване на реалните и имагинерните части от двете страни на равенството се получава:

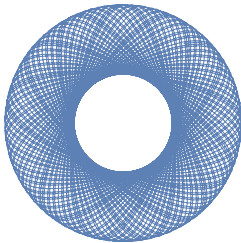
$$x(t) = C_1 \cos \Omega_1 t - C_2 \sin \Omega_1 t + D_1 \cos \Omega_2 t + D_2 \sin \Omega_2 t, \quad (61)$$

$$y(t) = C_1 \sin \Omega_1 t + C_2 \cos \Omega_1 t - D_1 \sin \Omega_2 t + D_2 \cos \Omega_2 t. \quad (62)$$

Като наложим началните условия  $\vec{r}(0) = (x_0, y_0, 0)$  и  $\vec{v}(0) = (v_{0x}, v_{0y}, 0)$ , окончателно имаме:

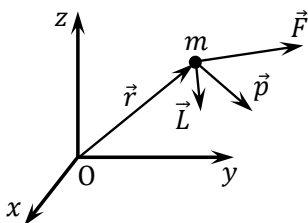
$$x(t) = \frac{\Omega_2 x_0 + v_{0y}}{\Omega_1 + \Omega_2} \cos \Omega_1 t - \frac{\Omega_2 y_0 - v_{0x}}{\Omega_1 + \Omega_2} \sin \Omega_1 t + \frac{\Omega_1 x_0 - v_{0y}}{\Omega_1 + \Omega_2} \cos \Omega_2 t + \frac{\Omega_1 y_0 + v_{0x}}{\Omega_1 + \Omega_2} \sin \Omega_2 t, \quad (63)$$

$$y(t) = \frac{\Omega_2 x_0 + v_{0y}}{\Omega_1 + \Omega_2} \sin \Omega_1 t + \frac{\Omega_2 y_0 - v_{0x}}{\Omega_1 + \Omega_2} \cos \Omega_1 t - \frac{\Omega_1 x_0 - v_{0y}}{\Omega_1 + \Omega_2} \sin \Omega_2 t + \frac{\Omega_1 y_0 + v_{0x}}{\Omega_1 + \Omega_2} \cos \Omega_2 t. \quad (64)$$



В общия случай частицата обикаля с кръгова честота  $(\Omega_1 + \Omega_2)/2 = \sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}/2$  по елипса, която от своя страна се завърта (прецесира) с кръгова честота  $(\Omega_2 - \Omega_1)/2 = \omega_c/2$ .<sup>(8)</sup> Когато  $\Omega_1/\Omega_2$  е рационално число, траекторията е затворена крива. При ирационално отношение на двете ъглови скорости траекторията наподобява фрактал, като “запълва” двумерна област (пръстен), както е показано на фигурата вляво.

4. Момент на импулса на материална точка. Закон за запазване на момента на импулса. Следствия от закона за запазване на момента на импулса. Пълнен импулс и момент на импулса на система от материални точки и закони за запазването им.



Моментът на импулса на материална точка спрямо фиксирана т. О (нека за удобство тази точка да бъде в началото на координатната система) означаваме с  $\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p}$ , където  $\vec{r}$  е радиус-векторът, свързващ т. О с материалната точка, а  $\vec{p}$  е нейният импулс, както е показано на фигурата вляво. Ако на материалната точка действа сила  $\vec{F}$ , можем да дефинираме *въртящ момент* на силата спрямо т. О като  $\vec{M} := \vec{r} \times \vec{F}$ . Като

<sup>(8)</sup>Ако сравним със случая, когато действа само еластична сила, се вижда, че магнитното поле “раздвойва” чистото движение по елипса. В известен смисъл, настоящата задача е класически механичен аналог на ефекта на Зеeman от атомната физика, където магнитното поле “разцепва” енергетичните нива на електроните в атома.

умножим векторно отляво уравнението на Нютон с  $\vec{r}$ , ще получим

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} = \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \vec{v}), \quad (65)$$

където сме използвали, че  $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ . Т.е.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (66)$$

което представлява уравнението на движение за ротации (аналог на II принцип на Нютон).

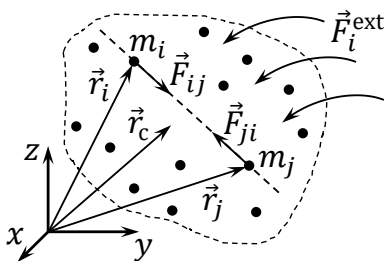
*Закон за запазване на момента на импулса на материална точка:* Ако сумарният въртящ момент, който действа на една материална точка в инерциална отправна система, е нула, тогава  $d\vec{L}/dt = 0$  и съответно моментът на импулса на материалната точка се запазва. Като изключим тривиалните случаи  $\vec{r} = 0$  (липса на движение) и  $\vec{F} = 0$  (равномерно и праволинейно движение), това на практика означава, че сумарната сила е успоредна на радиус-вектора на материалната точка в конкретната отправна система. Такава сила се нарича *централна сила*, тъй като е насочена по протежение на правата, която свързва материалната точка с фиксирана точка (т.нар. център на силата).

*Следствия от закона за запазване на момента на импулса:* Нека моментът на импулса на една материална точка се запазва. От дефиницията на момента на импулса имаме, че  $\vec{L} \cdot \vec{r} = (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{r} = 0$ , т.е.  $L_x x + L_y y + L_z z = 0$ . Това представлява уравнение на равнина, минаваща през началото на координатната система, тъй като  $L_{x,y,z} = \text{const}$ . Получихме, че движението на частицата се извършва в равнина, определена от началните условия на движение на частицата, като моментът на импулса е перпендикулярен на тази равнина.

По-рано изведохме, че площната скорост на една частица е

$$\dot{S} = \frac{\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)}{2} = \frac{\vec{L}}{2m} = \text{const}, \quad (67)$$

т.е. движението под действието на всички сили, при които се запазва моментът на импулса (централните сили), е с постоянна площна скорост. В случая на Нютоновата гравитационна сила този факт е установен емпирично още от Кеплер и е формулиран в неговия II закон за движението на планетите от Слънчевата система.



*Механични системи с произволен брой частици:* Нека да разгледаме отворена система от  $N$  материални точки с маси  $m_i, i = 1, \dots, N$  (вж. фигурата вляво). Отворена система означава, че частиците взаимодействат помежду си, но също така са под въздействието на външни за системата сили. Уравнението на Нютон за  $i$ -тата частица е

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}, \quad (68)$$

където  $\vec{F}_i^{\text{ext}}$  е сумарната външна сила, която действа на  $i$ -тата частица, а  $\vec{F}_{ij}$  е силата, с която  $j$ -тата частица действа на  $i$ -тата частица. Сумираме уравненията за всички мате-

риални точки от системата:

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \vec{F}_{ij}. \quad (69)$$

Ще означим пълната маса на системата с  $M = \sum_{i=1}^N m_i$ . Нека да въведем една специална точка, наречена *център на масите* на системата. По определение нейният радиус-вектор

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i. \quad (70)$$

Нека да означим сумарната външна сила с  $\vec{F}^{\text{ext}}$ . От III принцип на Нютон следва, че  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ , така че вътрешните сили взаимно се унищожават. Така уравнението (69) придобива простия вид

$$M \ddot{\vec{r}}_c = \vec{F}^{\text{ext}}, \quad (71)$$

т.е. центърът на масите се движи все едно сумарната външна сила действа върху материална точка с маса равна на масата на цялата система и намираща се в центъра на масите на системата. Ако дефинираме пълния импулс на системата:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{r}}_c, \quad (72)$$

виждаме, че пълният импулс се запазва при отсъствие на сумарна външна сила:

$$\dot{\vec{P}} = M \ddot{\vec{r}}_c = \vec{F}^{\text{ext}}, \quad (73)$$

откъдето при  $\vec{F}^{\text{ext}} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{const.}$

Пълният момент на импулса е

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i). \quad (74)$$

Оттук

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\vec{r}}_i \times \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \dot{\vec{v}}_i) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \left( \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}. \end{aligned} \quad (75)$$

Последната сума е равна на нула, тъй като според III принцип на Нютон силите между материалните точки  $i$  и  $j$  са насочени по посока на правата, свързваща точките. Може да

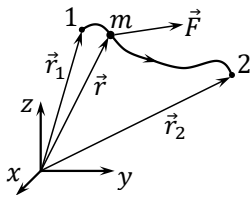
се съобрази, че векторът  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$  е по протежение на тази права, т.е.  $\vec{F}_{ij} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$  и векторните произведения в сумата са равни на нула. Така получаваме, че

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{M}^{\text{ext}}, \quad (76)$$

където с  $\vec{M}^{\text{ext}}$  сме означили сумарния външен въртящ момент. Оттук следва законът за запазване на пълния момент на импулса: при  $\vec{M}^{\text{ext}} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$ .

## 5. Работа и мощност на сила. Кинетична и потенциална енергия. Закон за запазване на пълната механична енергия. Запазващи се величини.

Когато една материална точка се премества от т. 1 до т. 2 (по някаква крива, която свързва двете точки) под действие на сила  $\vec{F}$ , казваме, че силата извършва *работа*  $A_{1 \rightarrow 2}$ , която е равна на следния криволинеен интеграл от II род:



$$A_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (77)$$

Като използваме II принцип на Нютон, ще получим:

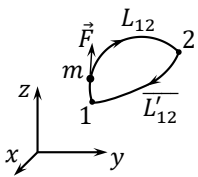
$$A_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \int_1^2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \int_1^2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{m}{2} \int_1^2 \frac{d(\vec{v}^2)}{dt} dt = \frac{m\vec{v}_2^2}{2} - \frac{m\vec{v}_1^2}{2} = T_2 - T_1, \quad (78)$$

където с  $T := \frac{m\vec{v}^2}{2}$  сме означили *кинетичната енергия* на материалната точка. Вижда се, че работата на силата е равна на изменението на кинетичната енергия.

Може да се въведе и *мощност* на силата:

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d}{dt} \int \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (79)$$

Ако силата  $\vec{F}$  е такава, че работата  $A_{1 \rightarrow 2}$  е една и съща за всички възможни пътища между т. 1 и т. 2, казваме, че силата е *консервативна*. В такъв случай, ако преместим материалната точка по затворен контур (т.е. крайното ѝ положение съвпада с началното), извършената работа ще бъде нула:



$$A = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{L_{12} \cup L'_{12}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{L_{12}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{L'_{12}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{L_{12}} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{L'_{12}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \quad (80)$$

като сме използвали свойствата на криволинейните интеграли от II род. Всички фундаментални взаимодействия са с консервативни сили (като гравитационната и електростатичната), така че това е много важен клас от сили. Пример за неконсервативна сила е силата на триене (съпротивление), която е винаги насочена обратно на посоката на движение и съответно нейната работа по затворен контур е винаги отрицателна.

Нека приложим теоремата на Стокс за работата на консервативна сила по затворен

контур

$$A = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0, \quad (81)$$

където интегрираме по повърхнината, заградена от контура. Последният интеграл е винаги нула, когато ротацията на силата е равна на нула, т.е. силата може да се представи като  $\vec{F} = -\nabla U(\vec{r})$ . Величината  $U(\vec{r})$  се нарича *потенциална енергия*. Нека отново да разгледаме работата на консервативна сила за преместване на материална точка от т. 1 до т. 2:

$$A_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 (\nabla U) \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 dU = -[U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)] = U_1 - U_2 = T_2 - T_1, \quad (82)$$

т.е. получихме, че

$$E_1 = T_1 + U_1 = T_2 + U_2 = E_2, \quad (83)$$

което изразява *закона за запазване на пълната механична енергия* на материална точка, когато на нея действат само консервативни сили. Ако на механична система действат и неконсервативни сили, което, строго погледнато, се случва винаги, механичната енергия не се запазва, но това не означава, че се губи енергия. Механичната енергия може да се преобразува в енергии от друг вид. Например, механичната енергия се превръща във вътрешна енергия (енергията на хаотично движение на градивните частици на телата).

*Запазващи се величини:* Запазващите се (при движението на дадена механична система от  $N$  частици) величини са функции от вида  $f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t)$ , които остават постоянни върху траекториите, т.е.

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_i} \cdot \dot{\vec{r}}_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \ddot{\vec{r}}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (84)$$

като сме използвали законите за движение:  $\ddot{\vec{r}}_i = \ddot{\vec{r}}_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Въвели сме също така следните векторни диференциални оператори за всяка една частица:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}, \frac{\partial}{\partial \dot{y}_i}, \frac{\partial}{\partial \dot{z}_i} \right).$$

От (84) следва, че стойностите на запазващите се величини се определят единствено от началните условия. Законите за запазване (в частност законът за запазване на пълната механична енергия) водят до наличието на запазващи се величини. С тяхна помощ се намалява реда на системата от обикновени диференциални уравнения на движение и така се улеснява тяхното решаване.

*Потенциали на основните видове сили:* От съотношението  $\vec{F} = -\nabla U(\vec{r})$  следва, че потенциалната енергия може да се представи във вида:

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (85)$$

като константната долна граница се избира по удобен начин – най-често се полага  $\vec{r}_0 = 0$ ,

или  $\vec{r}_0 = \infty$ , ако силата е неограничена в началото на координатната система. Добавянето на константа към потенциалната енергия не е физически съществено, тъй като силата не зависи от тази константа.

1) Силата на тежестта има вида  $\vec{F} \equiv \vec{G} = m\vec{g} = \text{const}$ , т.е. това е пример за хомогенна сила. Съответната потенциална енергия е

$$U(\vec{r}) = - \int_0^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_0^{\vec{r}} m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -m \int d(\vec{g} \cdot \vec{r}) = -m(\vec{g} \cdot \vec{r}) = mgz, \quad (86)$$

ако сме ориентирали оста  $Oz$  вертикално нагоре, т.е. получава се известният резултат от училищната физика.

2) Еластичната сила  $\vec{F}_{\text{ел}} = -k\vec{r}$  се описва със следната потенциална енергия:

$$U(\vec{r}) = \int_0^{\vec{r}} k\vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{k}{2} \int dr^2 = \frac{kr^2}{2}. \quad (87)$$

3) Нека материална точка с маса  $M$  е разположена в началото на координатната система. На друга материална точка с маса  $m$  и радиус-вектор  $\vec{r}$  действа Нютонова гравитационна сила  $\vec{F} = -\frac{GmM\vec{r}}{r^3}$ , където  $G$  е Нютоновата гравитационна константа (означава се също с  $\gamma$ ). Нейната гравитационна потенциална енергия е

$$U(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = GmM \int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r^3} = GmM \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = -\frac{GmM}{r}. \quad (88)$$

4) Кулоновата електростатична сила има същото поведение като Нютоновата гравитационна сила. Кулоновата потенциална енергия на частица със заряд  $q$  и радиус-вектор  $\vec{r}$ , която се движи в полето на неподвижна частица със заряд  $Q$  в началото на координатната система, е

$$U(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -kqQ \int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r^3} = -kqQ \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{kqQ}{r}, \quad (89)$$

където  $k$  е електричната константа.

## 6. Едномерни движения. Закон за движение. Период на ограничено едномерно движение.

Едномерно движение (в поле на консервативна сила) наричаме движението на материална точка, което се извършва под действието на сила, която зависи само от разстоянието до дадена равнина (ще използваме равнината  $x = 0$ ):  $\vec{F}(x) = (F(x), 0, 0)$ . Лесно може да се провери, че за такава сила  $\text{rot } \vec{F} = 0$ . Следователно силата е консервативна и може да се опише чрез потенциална енергия  $U(x)$ , като  $\vec{F} = -\nabla U$ , т.е.  $F(x) = -U'(x)$ . Уравнението на движение е  $m\ddot{x} = F(x) = -U'(x)$ . За решаване на това уравнение използваме закона за запазване на пълната механична енергия:

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + U'(x)\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + U') = 0 \implies E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = \text{const}, \quad (90)$$

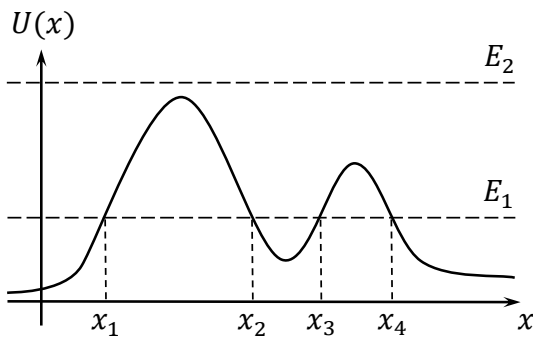
откъдето следва, че

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}, \quad (91)$$

като знакът зависи от посоката на движение. По принцип ще считаме, че движението е надясно (в положителната посока), т.е.  $\dot{x} \geq 0$  и знакът е положителен. Следователно

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}} \Rightarrow t = t(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad x_0 = x(0), \quad (92)$$

като енергията  $E = \frac{mv_{0x}^2}{2} + U(x_0)$ ,  $v_{0x} = \dot{x}(0)$ . Законът за движение  $x(t)$  се получава след "обръщане" на функционалната зависимост  $t(x)$ .



Екстремумите на  $U(x)$  дават равновесните точки (локалните минимума на потенциалната енергия са точки на устойчиво равновесие, а локалните максимуми са точки на неустойчиво равновесие). Разрешените области за движение по  $x$ -оста се определят от условието  $E \geq U(x)$ , тъй като  $E - U(x) = T(x) = \frac{m\dot{x}^2}{2} \geq 0$ . Граничните точки, където се реализира равенство  $E = U(x)$ , се наричат *точки на обръщане* (на фигурата вляво това са точките

$x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$  за енергия  $E_1$ ). В тези точки скоростта на частицата става равна на нула и има смяна на посоката на движение.

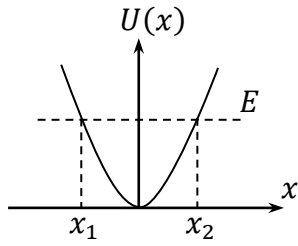
В зависимост от стойността на пълната механична енергия и поведението на потенциалната енергия се реализират три типа движение: ограничено (финитно), полуограничено (полуфинитно) и неограничено (инфинитно). Тези типове могат да се видят на фигурата по-горе. Движението с енергия  $E_1$  е полуограничено при  $x \in (-\infty, x_1]$ , ограничено при  $x \in [x_2, x_3]$  и полуограничено при  $x \in [x_4, +\infty)$ . Движението с енергия  $E_2$  е неограничено.

Ограниченото движение представлява незатихващо трептене около точка на устойчиво равновесие (в потенциална яма). Периодът на трептене на материална точка с пълна механична енергия  $E_1$  и потенциална енергия като на горната фигура е

$$T = 2 \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_2}^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{E_1 - U(x)}} = \sqrt{2m} \int_{x_2}^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{E_1 - U(x)}}, \quad (93)$$

където  $x_2$  и  $x_3$  са точките на обръщане в този случай.

В точките на устойчиво равновесие няма действаща сила и  $U' = 0$ , съответно. Около произволна точка на устойчиво равновесие  $x_{\min}$  може да развием потенциала в ред на Тейлър:  $U(x) \approx U(x_{\min}) + U''(x_{\min})(x - x_{\min})^2/2$ , като  $U''(x_{\min}) > 0$ . Както се вижда, потенциалът е приблизително квадратичен – т.нар. квадратична потенциална яма. Нека да разгледаме по-подробно движението в квадратични потенциали.



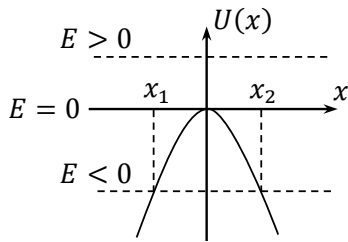
Квадратична потенциална яма:  $U(x) = kx^2/2, k > 0$ , откъдето  $F(x) = -U'(x) = -kx$  (хармоничен осцилатор). Точките на обръщане са при  $E = kx^2/2$ , т.е.  $x_{1,2} = \pm\sqrt{2E/k}$ . Установява се следното ограничено движение между  $x_1$  и  $x_2$ :

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{kx^2}{2}}} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{kx^2}{2E}}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{k}} \left[ \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}} x\right) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}} x_0\right) \right] \Rightarrow x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_0\right), \quad (94)$$

където сме направили субституцията  $u = x\sqrt{k/(2E)}$ . Лесно се вижда, че действително се получава хармонично трептене с кръгова честота  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Периодът на трептене е

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - kx^2/2}} = 2\sqrt{\frac{m}{k}} [\arcsin(1) - \arcsin(-1)] = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (95)$$



Квадратична потенциална бариера:  $U(x) = -kx^2/2, k > 0$ . Трябва да разгледаме три различни случая в зависимост от пълната механична енергия (вж. фигурата вляво).

1)  $E > 0$  (неограничено движение от  $-\infty$  до  $+\infty$ ):

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E + \frac{kx^2}{2}}} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{kx^2}{2E}}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{k}} [\operatorname{arcsinh}(u) - \operatorname{arcsinh}(u_0)] \Rightarrow x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sinh\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \operatorname{const}\right), \quad (96)$$

където отново сме направили субституцията  $u = x\sqrt{k/(2E)}$ .

2)  $E = 0$  (полуограничено движение от  $-\infty$  до 0 или от 0 до  $+\infty$ ):

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{kx^2}{2}}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \sqrt{\frac{m}{k}} (\ln|x| - \ln|x_0|) \Rightarrow x(t) = x_0 \exp\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right). \quad (97)$$

3)  $E < 0$  (полуограничено движение от  $-\infty$  до  $x_1$  или от  $x_2$  до  $+\infty$ ):

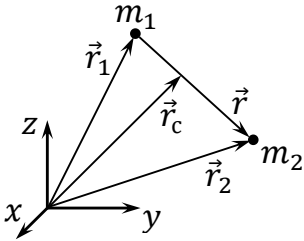
$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{-|E| + \frac{kx^2}{2}}} = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{-1 + \frac{kx^2}{2|E|}}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{k}} [\operatorname{arccosh}(u) - \operatorname{arccosh}(u_0)] \Rightarrow x(t) = (\pm) \sqrt{\frac{2|E|}{k}} \cosh\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \operatorname{const}\right), \quad (98)$$

където сме направили субституцията  $u = x\sqrt{k/(2|E|)}$ , а различните знаци в скобите съ-

ответстват на движение в положителната или отрицателната полуос.

7. Задача за двете тела. Запазване на пълния импулс в двучастичната задача. Система на центъра на масите. Редукция на двучастичната задача към едночастична и относително движение на приведената маса.



Разглеждаме две материални точки с маси  $m_1$  и  $m_2$ , на които не действат външни сили. От симетриите на пространството и времето в Нютоновата механика следва, че силите, с които двете точки си взаимодействат, са насочени по правата, свързваща точките, и зависят само от разстоянието между тях, т.е. силите са централни. Лесно се проверява, че ротацията на такива сили е равна на нула, т.е. силите са консервативни. Уравненията на Нютон за двете частици в

произволна инерциална отправна система са:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12}, \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21}, \quad (99)$$

където с  $\vec{F}_{12}$  е означена силата, с която втората частица действа на първата, а с  $\vec{F}_{21}$  е означена силата, с която първата частица действа на втората. От III принцип на Нютон следва, че  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ . Като съберем двете уравнения, се получава, че  $m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0$ . По определение центърът на масите на системата има радиус-вектор

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (100)$$

Вижда се, че  $M \ddot{\vec{r}}_c = 0$ , където  $M = m_1 + m_2$ . Това е частен случай на общия резултат, който гласеше, че центърът на масите на затворена система от материални точки се движи праволинейно и равномерно. Скоростта на центъра на масите е

$$\vec{v}_c = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2}. \quad (101)$$

Пълният импулс на системата от две частици е  $\vec{P} = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = M \vec{v}_c = \text{const}$ , т.е. пълният импулс на системата се запазва, което доказахме по-рано за произволни затворени механични системи.

Нека въведем вектора  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Радиус-векторите на двете частици може да се изразят чрез  $\vec{r}$  и  $\vec{r}_c$ . Получава се, че

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_c - \frac{m_2}{M} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_c + \frac{m_1}{M} \vec{r}, \quad (102)$$

т.е. положенията на частиците се изразяват относно центъра на масите на системата чрез вектора  $\vec{r}$ . Като заместим тези изрази в (99) и извадим първото уравнение от второто, ще получим

$$\frac{m_1 m_2}{M} \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21}, \quad (103)$$

т.е. задачата за двете тела се сведе до задача за движението на една (фиктивна) частица

с радиус-вектор  $\vec{r}$ , за която се изпълнява следното уравнение на Нютон:

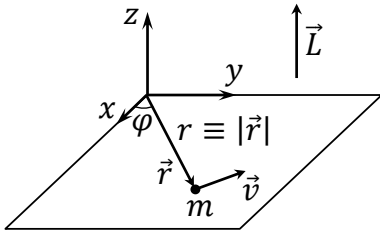
$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -\nabla U(r), \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{F} \equiv \vec{F}_{21}, \quad (104)$$

като величината  $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  се нарича *приведена маса* на системата. В почти всички интересни случаи едното тяло е с много по-голяма маса от другото, например  $m_1 \gg m_2$ . Тогава  $m \approx m_2$  и по-масивното тяло е практически неподвижно, а другото тяло се движи покрай него. Например, центърът на масите на системата Слънце–Земя е близо до центъра на Слънцето. Дори за системата Земя–Луна центърът на масите се намира под повърхността на Земята.

8. Движение на приведената маса в поле на централна консервативна сила. Пълна редукция на едночастичната задача с помощта на законите за запазване на момента на импулса и енергията.

Нека да разгледаме по-подробно движението на фиктивната частица с радиус-вектор  $\vec{r}$ . Знаем, че моментът на импулса на материална точка, на която действат само централни сили, се запазва. Това лесно се вижда, като се разгледа производната на момента на импулса по времето:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F} = -\vec{r} \times \nabla U(r) = -\frac{U'(r)}{r} (\vec{r} \times \vec{r}) = 0. \quad (105)$$



Както показахме по-рано, от запазването на  $\vec{L}$  следва, че движението на частицата се извършва в равнина, определена от началните условия, като моментът на импулса е перпендикулярен на тази равнина. Нека да ориентираме така координатната система, че моментът на импулса да е насочен по оста  $Oz$ . Тогава големината на момента на импулса  $L = L_z = m(xy' - yx')$ . Ако въведем полярни координати в равнината на движение

( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ), ще получим

$$L = m(xy' - yx') = m[r \cos \varphi (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi) - r \sin \varphi (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi)] = mr^2 \dot{\varphi}. \quad (106)$$

Нека да разпишем израза за пълната механична енергия в полярни координати:

$$E = T + U = \frac{m\vec{v}^2}{2} + U(r) = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2} + U(r) = \frac{m}{2} [(\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi)^2] + U(r) = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)}{2} + U(r). \quad (107)$$

Като използваме израза за момента на импулса (106), може да изключим  $\dot{\varphi}$  от горното уравнение

$$E = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)}{2} + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r). \quad (108)$$

Поради консервативността на силата пълната механична енергия се запазва и горното уравнение представлява обикновено диференциално уравнение с разделящи се про-

менливи като тези, които разгледахме в раздела за едномерни движения. Т.е. с помощта на законите за запазване на енергията и момента на импулса задачата за двете тела се редуцира до задача за едномерно движение на една частица в ефективен потенциал  $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$ , като  $\frac{L^2}{2mr^2}$  е центробежната потенциална енергия. Решаването на подобни задачи ни е известно:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))} \Rightarrow t(r) = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}}, \quad r_0 = r(t = 0), \quad (109)$$

откъдето може да определим  $r(t)$ . Двата знака съответстват на движение навътре (намаляващо  $r \rightarrow$  минус) и навън (растящо  $r \rightarrow$  плюс). От израза за момента на импулса (106) получаваме, че

$$\varphi(t) - \varphi_0 = \int_0^t \frac{L}{mr^2} dt, \quad \varphi_0 = \varphi(0). \quad (110)$$

Ние ще се интересуваме основно от траекторията  $r(\varphi)$ , която се получава от уравнението

$$\varphi(r) - \varphi_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{\frac{L}{mr^2} dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}}, \quad (111)$$

където за простота предполагаме, че движението е навън.

9. Кеплерова и Кулонова задача за две тела с потенциална енергия от вида  $U = -\frac{\alpha}{r}$ . Траектории при различни енергии. Вектор на Рунге–Ленц.

Кеплеровата задача е задачата за движението на две тела с маси  $m_1$  и  $m_2$ , между които действа Нютонова гравитационна сила с потенциална енергия  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ , където  $\alpha = Gm_1m_2 = GmM$ .  $G$  е Нютоновата гравитационна константа,  $m$  е приведената маса на системата, а  $M = m_1 + m_2$ . Тогава (111) става<sup>(9)</sup>

$$\begin{aligned} \varphi &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{\frac{L}{mr^2} dr}{\sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r}}} = - \int \frac{d\left(\frac{L}{r}\right)}{\sqrt{2mE - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2\alpha m}{r}}} \\ &= - \int \frac{d\left(\frac{L}{r}\right)}{\sqrt{2mE - \left(\frac{L^2}{r^2} - 2\frac{L\alpha m}{rL} + \frac{\alpha^2 m^2}{L^2}\right) + \frac{\alpha^2 m^2}{L^2}}} = - \int \frac{du}{\sqrt{2mE + \frac{\alpha^2 m^2}{L^2} - u^2}}, \end{aligned} \quad (112)$$

където сме въвели нова интеграционна променлива  $u = \frac{L}{r} - \frac{\alpha m}{L}$ . Оттук лесно се получава, че

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{L}{r} - \frac{\alpha m}{L}}{\sqrt{2mE + \frac{\alpha^2 m^2}{L^2}}} = \arccos \frac{\frac{L}{r} - \frac{\alpha m}{L}}{\frac{\alpha m}{L} \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}} = \arccos \frac{p - 1}{\varepsilon}, \quad (113)$$

<sup>(9)</sup>За улеснение ще използваме координати, при които  $\varphi_0$  съвпада с долната граница на интеграла откъсно на (111).

където сме въвели параметъра  $p = \frac{L^2}{\alpha m}$  и ексцентрицитета

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}. \quad (114)$$

Окончателно, за траекторията се получава:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (115)$$

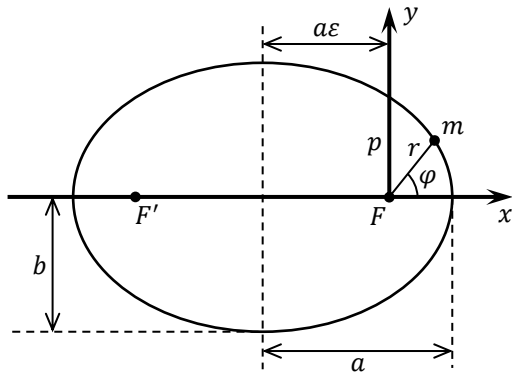
което представлява фокалното уравнение на конично сечение,<sup>(10)</sup> т.е. центърът на координатната система е във фокус на коничното сечение. Тъй като радиус-векторът  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  указва положението на второто тяло (с маса  $m_2$ ) спрямо първото тяло (с маса  $m_1$ ), горното уравнение (115) дава траекторията на второто тяло спрямо първото. В случая на планета с маса  $m_2$ , която се движи около Слънцето с маса  $m_1 \gg m_2$ , получаваме траекторията на планетата спрямо центъра на Слънцето, който е във фокус на съответното конично сечение.

Като използваме израза за ексцентрицитета (114), може да изразим пълната механична енергия чрез  $\varepsilon$ :

$$E = \frac{m\alpha^2(\varepsilon^2 - 1)}{2L^2}, \quad (116)$$

т.е. знакът на енергията се определя от големината на ексцентрицитета.

Нека сега да разгледаме различните видове траектории:



1) елиптични<sup>(11)</sup> орбити ( $\varepsilon < 1$ ): вижда се, че най-близката до центъра точка от орбитата (тази точка се нарича перицентър) е при  $\varphi = 0$ . Тогава  $r_{\min} = \frac{p}{1+\varepsilon}$ . Най-отдалечената точка от центъра (апоцентъра) е при  $\varphi = \pi$  и  $r_{\max} = \frac{p}{1-\varepsilon}$ . Отсечката между перицентъра и апоцентъра е големият диаметър на елипсата, т.е. голямата полуос е  $a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|}$ . Малката полуос е  $b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}$ . Като преминем от полярни към декартови координати, ще получим познатото уравнение на елипса с център в

точката с координати  $(x_c, y_c) = (-a\varepsilon, 0)$ :  $(x + a\varepsilon)^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ . В този случай движението е ограничено и пълната механична енергия е отрицателна. При  $\varepsilon = 0$  траекторията е окръжност с радиус  $R = p$  и енергията е минимална, като  $E_{\min} = -\frac{m\alpha^2}{2L^2}$ .

**Коментар** Най-известният пример за подобно движение по елипси представлява Слънчевата система, в която планетите обикалят около Слънцето по (приблизително) елип-

<sup>(10)</sup>Коничните сечения са планарни криви, които се получават при пресичането на прав кръгов конус и равнина. Ако равнината е успоредна на една единствена образуваща на конуса, то коничното сечение е парабола. Ако равнината е успоредна на две образуващи, се получава хипербола. Във всички останали случаи (т.е. ако равнината не е успоредна на образуваща на конуса) коничното сечение е елипса или окръжност като частен случай.

<sup>(11)</sup>Елипсата е планарна крива, такава че сумата от разстоянията между всяка една нейна точка и две фиксирани точки  $F$  и  $F'$ , които се наричат фокуси, е константа. Каноничното уравнение на елипсата в декартови координати е  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ .

тични орбити (I закон на Кеплер) с малки ексцентрицитети. Строгото доказателство на този факт като следствие от вида на гравитационната сила е едно от големите постижения на Нютон.

2) параболични<sup>(12)</sup> орбити ( $\varepsilon = 1$ ): движението е неограничено и с нулева енергия.

3) хиперболични<sup>(13)</sup> орбити ( $\varepsilon > 1$ ): движението е неограничено и с положителна енергия.

*Вектор на Рунге–Ленц:* Важна особеност на Кеплеровата (както и на Кулоновата) задача е, че освен пълната механична енергия и момента на импулса се запазва и т.нар. *вектор на Рунге–Ленц*  $\vec{A}$ . За да докажем това, нека да разгледаме следната производна по времето:

$$\frac{d(\dot{\vec{r}} \times \vec{L})}{dt} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{L} = -\frac{\alpha(\vec{r} \times \vec{L})}{mr^3} = -\frac{\alpha}{r^3}[\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})] = \frac{\alpha\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\alpha(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r}}{r^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha\vec{r}}{r}\right), \quad (117)$$

където сме използвали, че  $\vec{L} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \text{const}$ , а  $m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha\vec{r}}{r^3}$  (уравнението на движение). Като прехвърлим производните отляво, ще получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \frac{\alpha\vec{r}}{r}\right) = 0 \Rightarrow \vec{A} := \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \frac{\alpha\vec{r}}{r} = \text{const}. \quad (118)$$

Сравнително лесно може да се установи, че  $\vec{A} \cdot \vec{L} = 0$ , т.е.  $\vec{A}$  лежи в равнината на движение. Може да се покаже също така, че векторът на Рунге–Ленц е насочен по посока на оста  $Ox$  и големината му е  $|\vec{A}| = \alpha\varepsilon$ , т.е.  $\vec{A} \cdot \vec{r} = \alpha\varepsilon r \cos \varphi$ . От друга страна

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{r} \times \vec{L}) - \alpha r = (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{L} - \alpha r = \frac{L^2}{m} - \alpha r = \alpha(p - r), \quad (119)$$

откъдето отново се получава фокалното уравнение на траекторията (115).

*III закон на Кеплер:* От II закон на Кеплер за запазването на площната скорост (67) следва, че  $\dot{S} = \frac{L}{2m}$ . Оттук може да се получи следното представяне на площта  $S$ , заградена от елиптичната траектория:

$$S = \int_0^T \dot{S} dt = \int_0^T \frac{L dt}{2m} = \frac{LT}{2m} = \pi ab, \quad (120)$$

където  $T$  е периодът на движение (времето за една обиколка около Слънцето). Като използваме, че  $b = L \sqrt{\frac{a}{\alpha m}}$ , може да изведем съотношението (III закон на Кеплер):

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{m}{\alpha} = \frac{4\pi^2}{GM} \approx \frac{4\pi^2}{GM_{\odot}}, \quad (121)$$

<sup>(12)</sup>Параболата е планарна крива, такава че разстоянието между всяка една нейна точка и фиксирана точка  $F$ , която се нарича фокус, е равно на разстоянието от точката до фиксирана права, наречена директриса. Каноничното уравнение на параболата в декартови координати е  $x^2 = 2py$ .

<sup>(13)</sup>Хиперболата е планарна крива, такава че разликата от разстоянията между всяка една нейна точка и две фиксирани точки  $F$  и  $F'$ , които се наричат фокуси, е константа. Каноничното уравнение на хиперболата в декартови координати е  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ .

като сме използвали също, че масите на планетите са много по-малки от масата на Слънцето  $M_{\odot}$  и  $M \approx M_{\odot}$ .

*Извеждане на траекторията от радиалното уравнение на движение:* Радиалното уравнение на движение, което може да се получи след диференциране по времето на израза (108) за пълната механична енергия на системата, е

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{dU}{dr} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2}. \quad (122)$$

От представянето  $L = mr^2\dot{\varphi}$  на момента на импулса може да се изведе следната връзка между производните по  $t$  и  $\varphi$ :

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{d}{d\varphi} = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\varphi}. \quad (123)$$

Оттук

$$m\ddot{r} = m \frac{d}{dt} \left( \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) = \frac{L^2}{mr^2} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) = -\frac{L^2}{mr^2} \frac{d^2u}{d\varphi^2}, \quad (124)$$

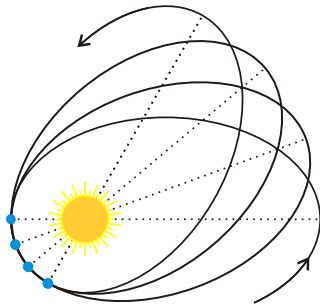
където сме въвели нова зависима променлива  $u = 1/r$ . Като отчетем (122), се получава:

$$-\frac{L^2}{mr^2} \frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2} \Rightarrow \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\alpha m}{L^2} = \frac{1}{p}. \quad (125)$$

Полученото диференциално уравнение за  $u(\varphi)$  е уравнение на хармоничен осцилатор, чието решение след наложени начални условия е

$$u(\varphi) = \frac{\varepsilon}{p} \cos \varphi + \frac{1}{p} = \frac{1}{r(\varphi)}, \quad (126)$$

откъдето отново следва (115).



*Отместване на перихелия на Меркурий:* През XIX век френският астроном и математик Льоверие забелязал, че орбитата на Меркурий се завърта (прецесира) при обикалянето на планетата около Слънцето, както е показано на фигурата вляво. Тази прецесия се дължи на няколко причини, като най-значима роля играе гравитационното привличане от страна на останалите планети. Една от причините е, че теорията на Нютон не описва достатъчно добре гравитационното взаимодействие. Въпреки че точното обяснение на това явление се дава от общата теория на относителността, прецесията може да се опише ефективно, като се модифицира изразът за Нютоновата гравитационна потенциална енергия. Най-простата възможна модификация е

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \left( 1 + \frac{3GM_{\odot}}{c^2 r} \right), \quad (127)$$

където  $M_{\odot}$  е масата на Слънцето, а  $c$  е скоростта на светлината във вакуум. Отново радиалното уравнение на движение може да се получи след диференциране по времето на

израза за пълната механична енергия на системата Слънце–Меркурий:

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{dU}{dr} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2} - \frac{6\alpha GM_{\odot}}{c^2 r^3}. \quad (128)$$

Отново от израза за момента на импулса  $L = mr^2\dot{\varphi}$  следва връзката (123) между производните по  $t$  и  $\varphi$ :

$$m\ddot{r} = m \frac{d}{dt} \left( \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) = \frac{L^2}{mr^2} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) = -\frac{L^2}{mr^2} \frac{d^2u}{d\varphi^2}, \quad (129)$$

където отново сме въвели променливата  $u = 1/r$ . Като отчетем (128), се получава:

$$-\frac{L^2}{mr^2} \frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2} - \frac{6\alpha GM_{\odot}}{c^2 r^3} \Rightarrow \frac{d^2u}{d\varphi^2} + \left( 1 - \frac{6\alpha^2}{c^2 L^2} \right) u = \frac{\alpha m}{L^2}, \quad (130)$$

като сме използвали, че  $GmM_{\odot} \approx \alpha$ . Полученото диференциално уравнение за  $u(\varphi)$  отново е уравнение на хармоничен осцилатор, чието решение може да се представи във вида

$$u(\varphi) = A \cos \left( \sqrt{1 - \frac{6\alpha^2}{c^2 L^2}} \varphi \right) + \frac{\alpha m}{L^2 - \frac{6\alpha^2}{c^2}} = \frac{1}{r(\varphi)}, \quad A = \text{const} > 0. \quad (131)$$

Перихелиите са точките от орбитата с минимално  $r$  (максимално  $u$ ), т.е. когато косинусът става равен на единица и, съответно, аргументът на косинуса е кратен на  $2\pi$ . С други думи, има перихелий с полярен ъгъл  $\varphi = 0$ , а следващият перихелий се наблюдава при

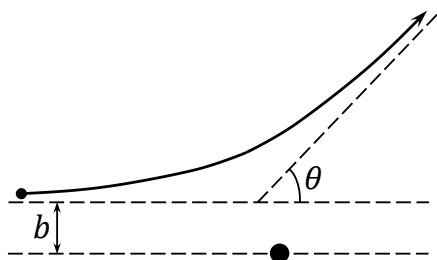
$$\sqrt{1 - \frac{6\alpha^2}{c^2 L^2}} \varphi = 2\pi \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{6\alpha^2}{c^2 L^2}}} \approx \frac{2\pi}{1 - \frac{3\alpha^2}{c^2 L^2}} \approx 2\pi \left( 1 + \frac{3\alpha^2}{c^2 L^2} \right) = 2\pi + \frac{6\pi\alpha^2}{c^2 L^2}, \quad (132)$$

като сме използвали, че отместването на перихелия е много малко ( $\alpha \ll cL$ ). За един период на обикаляне на Меркурий около Слънцето (една меркурианска година) получаваме отместване  $\delta\varphi = 6\pi\alpha^2/(c^2 L^2)$ . Експериментално е установено, че за един век (сто земни години) отместването на перихелия е приблизително  $43''$  (43 дъгови секунди), което е в съгласие с нашия резултат.

## 10. Разсейване на частици в поле на централна консервативна сила. Сечения на разсейване.

Експериментите с разсейване на частици са основен начин за изследване на структурата на материята на атомни и субатомни мащаби. При такива експерименти снопове от частици се удрят в мишена, като взаимодействат с обекти от мишената (например атомни ядра). Като се изследва разпределението на така получените разсеяни частици, може да се получи информация за мишената и взаимодействието между падащите частици и обектите от мишената. Класически пример за подобен експеримент е опитът на Ръдърфорд и неговите сътрудници по разсейването на хелиеви ядра от златна мишена, с което се утвърждава правилният модел за структурата на атома. Въпреки че в микросвета е по-коректно да се използва квантовата механика и съответно квантовата теория

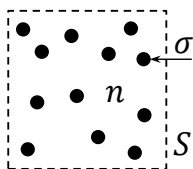
на разсейването, основните понятия и използвани величини може да се въведат и чисто класически, например пълното и диференциалното сечения на разсейване.



**Прицелен параметър и ъгъл на разсейване:** Преди да обсъдим сеченията на разсейване, които описват разсейване на много частици, нека да разгледаме две важни величини, които характеризират разсейването на една единствена частица от даден обект от мишената (вж. фигурата вляво). Първоначално, падащата частица е далеч от мишената, като се движи свободно (праволинейно и равномерно). Разстоянието

между направлението на движение преди взаимодействието и разсейващия обект се нарича прицелен параметър. Ще означаваме този параметър с  $b$ , както е показано на фигурата. Колкото  $b$  е по-малко, толкова по-добре е “прицелена” падащата частица в обекта от мишената. След разсейването отново движението е праволинейно и равномерно, като ъгълът между посоките на движение преди и след разсейването се нарича ъгъл на разсейване  $\theta$  (вж. фигурата по-горе). Съществува зависимост  $b(\theta)$  между прицелния параметър и ъгъла на разсейване, от която може да се изведе теоретично съответното сечение на разсейване на много частици. Ако няма разсейване, ъгълът на разсейване е нулев. В частния случай на  $b = 0$  (идеално прицелване) ъгълът на разсейване е  $180^\circ$  (падащата частица се отразява назад) или  $0^\circ$ , ако падащата частица премине през обекта от мишената.

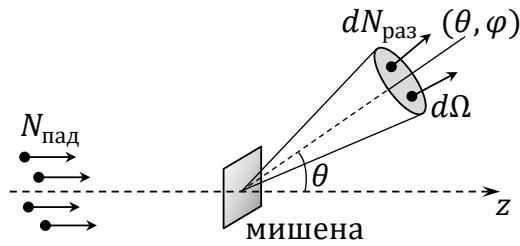
**Сечения на разсейване:** Теорията на разсейването на частици намира най-голямо приложение в атомната и субатомната физика. При такива мащаби е сравнително лесно да се измери експериментално ъгълът на разсейване, но на практика е невъзможно да се определи прицелният параметър за едно отделно разсейване, тъй като параметърът е от порядъка на 0,1 нанометра или дори по-малък. Поради тази причина се работи с т.нар. сечение на разсейване, което характеризира резултата от много на брой разсейвания с всевъзможни прицелни параметри. От една страна частицата пада върху голяма мишена и не е ясно къде точно ще претърпи разсейване. От друга страна, когато работим със сноп от много падащи частици, те имат различни прицелни параметри и се разсейват под различни ъгли. За да се опише статистическото разпределение на разсеяните частици, се използват сечения на разсейване.



Нека първо да разгледаме разсейването само на една падаща частица върху мишена с напречна площ  $S$  (вж. фигурата вляво). Може да пресметнем вероятността за единично разсейване, ако използваме концентрацията на обектите от мишената  $n$  (брой разсейващи обекти на единица напречна площ) и сечението на разсейване от един обект  $\sigma$  (ефективната напречна площ<sup>(14)</sup> на един разсейващ обект). Търсената вероятност ще бъде просто  $\sigma n$ , тъй като това е вероятността падащата частица да се удари в някой от разсейващите обекти. С други думи,  $\sigma n$  дава отношението на общата напречна площ на обектите спрямо площта на мишената, като считаме, че мишената е достатъчно тънка, за да няма многократни разсейвания. Ако пада сноп от  $N_{\text{пад}}$  частици върху мишената, то броят на разсеяните частици ще бъде  $N_{\text{раз}} = N_{\text{пад}} \sigma n$ . Ако знаем  $N_{\text{пад}}$  и  $n$  и измерим  $N_{\text{раз}}$ , може да намерим сечението на разсейване  $\sigma$ , което носи информация

(14)Тъй като ядрените размери са от порядъка на  $10^{-14}$  m, удобна мерна единица за сечението на разсейване е т.нар. *барн*:  $1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$ .

за взаимодействието между падащите частици и мишената.



*Диференциално сечение на разсейване:* Ако искаме да опишем разпределението на разсеяните частици в зависимост от ъгъла на разсейване, трябва да използваме т.нар. диференциално сечение на разсейване. Нека да вземем  $z$ -оста по посока на падащите частици. Тогава ъгълът на разсейване ще бъде сферичният ъгъл  $\theta$  (вж. фигурата вляво). Тъй като разсей-

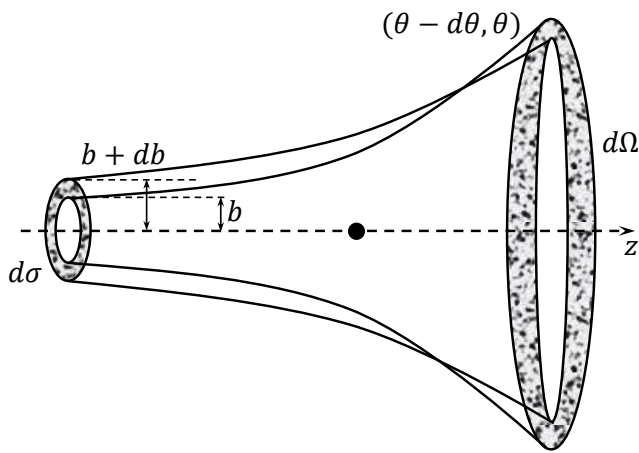
ването от мишената по принцип е в цялото пространство, се работи с диференциални *пространствени* ъгли  $d\Omega$  по посока на дадено направление, определено от сферичните ъгли  $(\theta, \varphi)$ . С други думи, разглеждаме разсейването в безкрайно тънък конус около направлението, зададено от  $(\theta, \varphi)$ , като съответният безкрайно малък пространствен ъгъл около това направление е  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ .<sup>(15)</sup> Нека да означим броя на разсеяните частици в този много малък конус с  $dN_{\text{раз}}$ , макар че те се изменят целочислено. От казаното по-горе следва, че

$$dN_{\text{раз}} = N_{\text{пад}} n d\sigma = N_{\text{пад}} n \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi) d\Omega, \quad (133)$$

където  $d\sigma$  е безкрайно малкото (ефективно) сечение на разсейване на частиците в пространствения ъгъл  $d\Omega$ . Отношението  $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi)$  се нарича диференциално сечение на разсейване и играе основна роля в теорията на разсейването, тъй като дава разпределението по ъгли на разсейване на частиците. За да получим броя на разсеяните частици в определен пространствен ъгъл, трябва да интегрираме диференциалното сечение по съответния интервал от ъгли. Пълното сечение на разсейване се получава, като интегрираме по всички пространствени направления:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi) d\Omega = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi) d\varphi. \quad (134)$$

<sup>(15)</sup> Пространствените ъгли могат да се дефинират подобно на централните ъгли в окръжност. Както централният ъгъл е равен (в радиани) на отношението на отсечената дъга от окръжността към радиуса ( $\Delta\varphi = s/R$ ), пространственият ъгъл във върха на произволен конус е равен (в стерadianи) на отношението на отсечената площ от сфера с център във върха на конуса към квадрата на радиуса на сферата:  $\Delta\Omega = S/R^2$ . Като използваме сферични координати, оттук следва, че безкрайно малък пространствен ъгъл  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ . От формулата за пълната площ на сферата се вижда, че пълният пространствен ъгъл е  $4\pi$ .



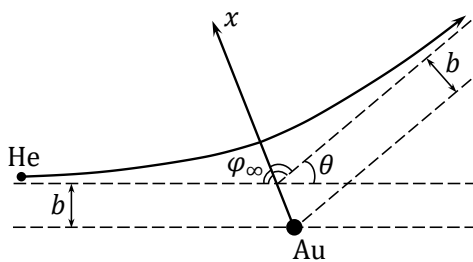
Разсейване на частици в поле на централна консервативна сила: Ако взаимодействието е централно, разсейването ще бъде аксиално симетрично относно правата по посока на падащите частици ( $z$ -оста), която минава през разсейващия обект (вж. фигурата вляво). Ако дадена падаща частица има прицелен параметър  $b$  и взаимодействието е известно, може да изчислим еднозначно съответния ъгъл на разсейване  $\theta(b)$ . Като обърнем зависимостта,

ще получим  $b(\theta)$ . Частиците, които се разсейват в интервала от ъгли  $(\theta - d\theta, \theta)$ , преди това минават през пръстена с радиус  $b(\theta)$  и дебелина  $db$ , както може да се види на фигурата. Напречното сечение на пръстена е точно  $d\sigma = 2\pi b db$ . Поради аксиалната симетрия може да интегрираме по  $\varphi$  и съответното  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ . Оттук за диференциалното сечение на разсейване се получава:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (135)$$

Взели сме абсолютна стойност, за да гарантираме, че  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  ще бъде положително, тъй като често  $b(\theta)$  е намаляваща функция и съответната ѝ производна е отрицателна.

11. Кулонова задача за две тела с потенциална енергия от вида  $U = \frac{\alpha}{r}$ . Формула на Ръдърфорд.



В Кулоновата задача се изследва движението на две заредени частици, като се отчита само Кулоновата електростатична сила между тях. Ще разгледаме задачата в контекста на опита на Ръдърфорд по разсейване на хелиеви ядра от златна мишена. На фигурата вляво е показано движението на едно He-ядро в полето на ядро на златото. Между двете ядра действа електростатична сила на от-

блъскване с потенциална енергия  $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ , където  $\alpha = 2Zke^2$ .  $Z$  е поредният номер на златото в периодичната таблица на елементите,  $k$  е електричната константа, а  $e$  – елементарният електричен заряд. За удобство сме избрали координатната система да бъде центрирана в ядрото на златото, като оста  $Ox$  минава през точката на най-голямо доближаване (перицентъра) на хелиевото ядро до ядрото на златото, т.е.  $\varphi(r_{\min}) = 0$ . Траекторията (хипербола) на хелиевото ядро е симетрична относно оста  $Ox$ , което означава, че  $Ox$  е ъглополовяща на ъгъла, който сключват асимптотите към траекторията.

Нека да използваме равенството (111), като интегрираме от перицентъра ( $r_0 = r_{\min}$ ,

$\varphi_0 = 0$ ) до безкрайност ( $r = +\infty$ ,  $\varphi(+\infty) = \varphi_\infty$ ):

$$\begin{aligned}\varphi_\infty &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_{\min}}^{+\infty} \frac{\frac{L}{mr^2} dr}{\sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}}} = - \int \frac{d\left(\frac{L}{r}\right)}{\sqrt{2mE - \frac{L^2}{r^2} - \frac{2\alpha m}{r}}} \\ &= - \int \frac{d\left(\frac{L}{r}\right)}{\sqrt{2mE - \left(\frac{L^2}{r^2} + 2\frac{L}{r} \frac{\alpha m}{L} + \frac{\alpha^2 m^2}{L^2}\right) + \frac{\alpha^2 m^2}{L^2}}} = - \int_{u_{\max}}^{\alpha m/L} \frac{du}{\sqrt{2mE + \frac{\alpha^2 m^2}{L^2} - u^2}},\end{aligned}\quad (136)$$

където сме въвели нова интеграционна променлива  $u = \frac{L}{r} + \frac{\alpha m}{L}$ . Оттук имаме, че

$$\varphi_\infty = \arccos \frac{u}{\sqrt{2mE + \frac{\alpha^2 m^2}{L^2}}} \Big|_{u=u_{\max}}^{\alpha m/L} = \arccos \frac{\frac{\alpha m}{L}}{\sqrt{2mE + \frac{\alpha^2 m^2}{L^2}}}, \quad (137)$$

т.е. долната граница на интеграла е нула, тъй като

$$E = \frac{L^2}{2mr_{\min}^2} + \frac{\alpha}{r_{\min}} \Rightarrow \frac{\frac{L}{r_{\min}} + \frac{\alpha m}{L}}{\sqrt{2mE + \frac{\alpha^2 m^2}{L^2}}} = 1. \quad (138)$$

Енергията на хелиевите ядра е  $E = \frac{mv_\infty^2}{2}$ , където  $m$  е тяхната маса, а  $v_\infty$  е големината на скоростта им на много голямо разстояние от мишената. Техният момент на импулса  $L = mbv_\infty$  се изразява чрез прицелния параметър  $b$ . Като заместим тези изрази в (137), получаваме, че

$$\cos \varphi_\infty = \frac{\frac{\alpha}{bv_\infty}}{\sqrt{m^2 v_\infty^2 + \frac{\alpha^2}{b^2 v_\infty^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m^2 b^2 v_\infty^4}{\alpha^2}}} \Rightarrow \tan \varphi_\infty = \frac{mbv_\infty^2}{\alpha}. \quad (139)$$

Може да използваме, че ъгълът на разсейване  $\theta = \pi - 2\varphi_\infty$  (вж. фигурата по-горе). Оттук

$$\tan \varphi_\infty = \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{mbv_\infty^2}{\alpha} \Rightarrow b(\theta) = \frac{\alpha}{mv_\infty^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, \quad (140)$$

т.е. намерихме зависимостта между прицелния параметър и ъгъла на Кулоново разсейване. В частния случай когато  $b = 0$ , ъгълът  $\theta = 180^\circ$ , т.е. хелиевото ядро се разсейва директно назад.

Нека върху златна мишена да пада сноп от  $N_{\text{пад}}$  хелиеви ядра. Броят частици  $dN_{\text{раз}}$ , които се разсейват в интервала от ъгли  $(\theta - d\theta, \theta)$ , се дава от (133). Тъй като Кулоновата сила е централна, потокът от разсеяни частици е симетричен относно направлението на падащия сноп и може да използваме формулата (135) за диференциалното сечение на разсейване. Така се получава, че

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{\alpha}{2mv_\infty^2} \frac{b(\theta)}{\sin \theta} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\alpha^2}{4m^2 v_\infty^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = \frac{\alpha^2}{16E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (141)$$

което представлява формулата на Ръдърфорд за диференциалното сечение на нерелативистко Кулоново разсейване. Както се вижда, диференциалното сечение зависи от стойността на пълната механична енергия  $E$  на хелиевите ядра. Интересно е, че квантовомеханичният резултат за сечението на разсейване съвпада с класическия, т.е. това е резултат без квантови поправки.

Формулата на Ръдърфорд дава плътността (интензивността) на потока от разсеяни частици в зависимост от ъгъла на разсейване  $\theta$ . Например, ако искаме да намерим колко пъти е по-интензивен потокът от разсеяни частици на ъгъл  $60^\circ$  в сравнение с разсеяните частици на ъгъл  $90^\circ$ , трябва да образуваме частното

$$\frac{d\sigma(60^\circ)}{d\sigma(90^\circ)} = \frac{\sin^4 45^\circ}{\sin^4 30^\circ} = 4, \quad (142)$$

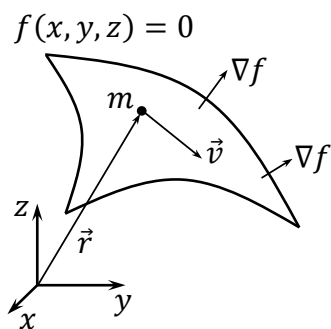
т.е. четири пъти повече частици се разсейват на  $60^\circ$  отколкото на  $90^\circ$  (в единица пространствен ъгъл), което следва от силната зависимост на сечението от ъгъла на разсейване. Първоначално, Ръдърфорд и неговите сътрудници са използвали платинена мишена и са установили експериментално, че  $1/8000$  от хелиевите ядра се разсейват назад, т.е. с ъгли на разсейване  $\theta \in (90^\circ, 180^\circ)$ . Този резултат ясно е показал, че масата на атома е концентрирана в ядро с малки размери, в съгласие с правилния модел за структурата на атомите.

## 12. Механични системи с връзки. Уравнения на Лагранж от I род. Закон за запазване на пълната механична енергия при наличието на връзки.

Досега разглеждахме свободното движение на системи от  $N$  материални точки под действието на дадени сили. Върху движението на частиците могат да бъдат наложени различни по вид ограничения, които в механиката е прието да се наричат *връзки*. Връзките представляват съотношения между положенията (радиус-векторите  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ ) и скоростите  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N$  на материалните точки, като може да зависят и явно от времето.<sup>(16)</sup> Основно ще разглеждаме крайни статични връзки, тъй като по-трудно се работи с нехолономни връзки в Лагранжевата и Хамилтоновата формулировки на класическата механика, които ще развием оттук нататък.<sup>(17)</sup> Такива връзки, т.е. функционални зависимости от вида  $f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 0$ , могат да се осмислят най-естествено като уравнения на хиперповърхнини в пространството от всички координати на частиците от механичната система.

<sup>(16)</sup> Ако тези съотношения се изразяват чрез равенства:  $f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, t) = 0$ , то връзките се наричат удържащи. Ако се изразяват чрез неравенства (напр.  $g(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, t) \geq 0$ ), то говорим за неудържащи връзки. От своя страна удържащите връзки се разделят на крайни (които не съдържат скоростите на частиците) и диференциални (в които влизат и скоростите). Ако една диференциална връзка може да се интегрира по времето, така че да елиминираме скоростите, то тя се нарича интегрируема. В противен случай диференциалната връзка е неинтегрируема. Неудържащите и неинтегрируемите връзки се наричат също така нехолономни връзки, докато крайните връзки и интегрируемите връзки (които могат да се сведат до крайни) се наричат холономни връзки. Освен това, връзките се разделят на статични (ако не зависят явно от времето) и нестатични (които зависят явно от времето, т.е. се движат).

<sup>(17)</sup> Пример за нехолономна връзка имаме в случая, когато тяло едновременно се върти около вертикална ос и се търкаля без хлъзгане по някаква повърхност.



Нека за простота да разгледаме движението на една материална точка, върху което е наложена една връзка  $f(\vec{r}(t)) \equiv f(x(t), y(t), z(t)) = 0$ , където  $\vec{r}(t)$  е радиус-векторът на частицата с течение на времето. В случая връзката представлява уравнение на повърхнина в тримерното пространство. Като диференцираме връзката по времето, ще получим:

$$\frac{df}{dt} = \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial f}{\partial z} = \vec{v} \cdot \nabla f = 0, \quad (143)$$

т.е. движението на частицата е тангенциално на връзката (материалната точка се движи по повърхнината, определена от връзката). Нека да диференцираме връзката още веднъж по времето:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \nabla f) = \vec{v} \cdot \frac{d(\nabla f)}{dt} + \vec{a} \cdot \nabla f = D^2 f + \frac{\vec{F} \cdot \nabla f}{m} = 0, \quad (144)$$

като сме използвали уравнението на Нютон:  $m\vec{a} = \vec{F}$ . Изведеното равенство (144) се нарича условие за съвместимост на силата  $\vec{F}$  и връзката  $f$ . В общия случай силата не е съвместима с връзката, което означава, че трябва да добавим т.нар. *реакция* на връзката  $\vec{R}$  към материалната сила  $\vec{F}$ :  $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}$ . Оттук равенството (144) придобива вида:

$$\vec{R} \cdot \nabla f = -mD^2 f - \vec{F} \cdot \nabla f \Rightarrow \vec{R} = -\frac{mD^2 f + \vec{F} \cdot \nabla f}{(\nabla f)^2} \nabla f + \vec{T}, \quad (145)$$

като  $\vec{T} \cdot \nabla f = 0$ . С вектора  $\vec{T}$  сме означили сумарните дисипативни сили (на триене), които биха могли да действат на материалната точка. Оттук нататък няма да разглеждаме дисипативни сили, тъй като те не участват по естествен начин в подхода на Лагранж към класическата механика. Вижда се, че реакцията на връзката има следния общ вид:  $\vec{R} = \lambda \nabla f$ , като  $\lambda$  се нарича *Лагранжев множител*. Така полученото уравнение на движение се нарича *уравнение на Лагранж от I род*:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \lambda \nabla f. \quad (146)$$

С помощта на уравнения от този вид може да анализираме движението на механични системи с наложени връзки.

При две връзки  $f_1(\vec{r}) = f_2(\vec{r}) = 0$  (в този случай ще имаме едномерно движение на частицата, т.е. движение по крива) възникват съответно две сили на реакция:  $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2$ . В общия случай на  $N$  материални точки и  $n$  на брой ( $n < 3N$ ) връзки  $f_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , уравненията на Лагранж от I род са:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \vec{r}_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (147)$$

като връзките трябва да имат ненулево сечение (например не може една частица да се намира едновременно върху две успоредни равнини) и да няма функционална зависимост

между тях (връзките да са независими, т.е. да определят различни хиперповърхнини).

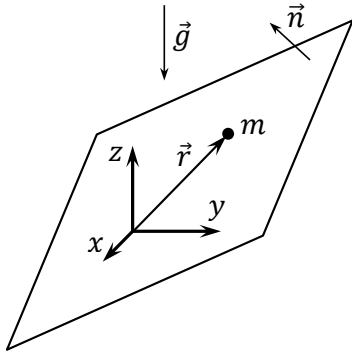
*Закон за запазване на пълната механична енергия при наличието на връзки:* За простота ще разгледаме една материална точка, върху която е наложена една връзка. Ще считаме, че на частицата действа консервативна сила, която не зависи явно от времето. Като умножим уравнението (146) скалярно по скоростта на частицата  $\vec{v}$ , ще получим:

$$m\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (148)$$

като сме използвали условието (143). Горното равенство се преобразува по следния начин:

$$\frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}^2}{2} = -\vec{v} \cdot \nabla U(\vec{r}) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}^2}{2} + U(\vec{r}) \right) = 0 \Rightarrow \frac{m\vec{v}^2}{2} + U(\vec{r}) = E = \text{const}, \quad (149)$$

т.е. законът за запазване на пълната механична енергия не зависи от връзките.



*Движение на частица върху наклонена равнина в полето на силата на тежестта:* Нека е дадена равнина, която минава през началото на координатната система и има нормален вектор  $\vec{n} := \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \text{const}$ , където  $f = Ax + By + Cz = 0$  ( $A, B, C = \text{const}$ ). Материална точка с маса  $m$  е ограничена да се движи върху равнината, т.е. нейният радиус-вектор ще лежи в равнината и, съответно,  $\vec{n} \cdot \vec{r}(t) = 0$ . Оттук след диференциране по времето се получава, че  $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$  и  $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ . Уравнението на Лагранж от I род може да се представи във вида:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \lambda\vec{n}. \quad (150)$$

Като го умножим скалярно по  $\vec{n}$ , ще получим:

$$m(\vec{a} \cdot \vec{n}) = 0 = m(\vec{g} \cdot \vec{n}) + \lambda \Rightarrow \lambda = -m(\vec{g} \cdot \vec{n}), \quad (151)$$

откъдето ще имаме за ускорението на частицата:

$$\vec{a} = \vec{g} - (\vec{g} \cdot \vec{n})\vec{n} = \vec{n} \times (\vec{g} \times \vec{n}) = \text{const}. \quad (152)$$

Окончателно, законът за движение на материалната точка ще бъде:

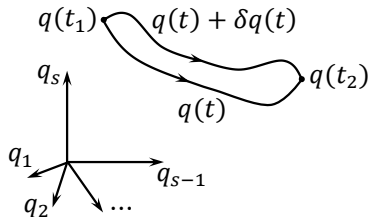
$$\vec{r}(t) = \frac{[\vec{n} \times (\vec{g} \times \vec{n})]t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0, \quad (153)$$

където  $\vec{r}_0 = \vec{r}(0)$ ,  $\vec{v}_0 = \vec{v}(0)$ .

**13. Степени на свобода и обобщени координати на механична система. Лагранжиан и действие. Вариационен принцип на Хамилтон. Уравнения на Лагранж от II род.**

Ако броят на наложените връзки е  $n$ , то казваме, че механична система от  $N$  материални точки има  $s = 3N - n$  степени на свобода, т.е. минималният брой независими величини

ни, които са необходими за еднозначното определяне на положението на всички точки от системата, е  $s$ . Произволно избрани такива величини  $q_1, q_2, \dots, q_s$  се наричат *обобщени координати*. Може да се въведат съответно и *обобщени скорости*  $\dot{q}_i, i = 1, \dots, s$ . За пълното определяне на механичното състояние на системата в даден момент са нужни координатите и скоростите на всички частици, т.е.  $2s$  на брой величини. Те се получават, като се реши системата от уравнения на движение  $\ddot{q}_i = \ddot{q}_i(q, \dot{q}, t), i = 1, \dots, s$ , т.е.  $s$  обикновени диференциални уравнения от втори ред. С  $q$  и  $\dot{q}$  ще означаваме накратко целия набор от обобщени координати  $q_i, i = 1, \dots, s$  и скорости  $\dot{q}_i, i = 1, \dots, s$ .



Естествен начин за получаването на уравненията на движение е т.нар. *вариационен принцип на Хамилтон*,<sup>(18)</sup> който ще изложим накратко. Нека въведем функцията на  $2s + 1$  променливи *лагранжиан*  $L(q, \dot{q}, t) := T(q, \dot{q}) - U(q, t)$ , която синтезирано характеризира механичната система заедно с наложените връзки и действащите консервативни сили. С  $T(q, \dot{q})$  сме означили сумарната кинетична енергия на всички материални точки от системата, а  $U(q, t)$  е

сумарната потенциална енергия на всички действащи сили. В момента  $t_1$  ще означим стойностите на обобщените координати с  $q(t_1)$ , а в момента  $t_2$  – с  $q(t_2)$ .<sup>(19)</sup> Механичната система се “движи” между тези две точки в конфигурационното пространство по такъв начин, че интегралът (по-точно функционалът<sup>(20)</sup>) *действие*

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L[q(t), \dot{q}(t), t] dt \quad (154)$$

да е стационарен, т.е. действието да е в “критична точка” – по принцип минимум, но може да бъде и седлова точка.<sup>(21)</sup> Действието е такова, когато неговата вариация  $\delta S$  е равна на нула. Вариацията на действието се получава, като варираме възможните закони за движение:

$$q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t), \quad (155)$$

като сме фиксирали “краищата” ( $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ ), което може да се види на фигурата по-горе. Използвайки сумиране по повтарящите се индекси  $i = 1, \dots, s$ , имаме

$$\begin{aligned} \delta S &= S[q(t) + \delta q(t)] - S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \\ &\approx \int_{t_1}^{t_2} \left( L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt, \end{aligned} \quad (156)$$

<sup>(18)</sup>В литературата по механика може да срещнете този принцип също като *принцип на най-малкото действие*, което не винаги е коректно наименование, както ще видим след малко.

<sup>(19)</sup>Обобщените координати на дадена механична система представляват също така координати в т.нар. *конфигурационно пространство* (пространството от всички възможни положения, които могат да заемат материалните точки от системата). Във всеки един момент от времето положението на *всички* частици от системата се описва с *една* точка в конфигурационното пространство, както може да се види на фигурата по-горе.

<sup>(20)</sup>Функционалът представлява “функция” от функция. В случая действието зависи от законите за движение  $q(t)$ , които от своя страна са функции на времето. Вариацията на даден функционал е подобна на диференциала от функция.

<sup>(21)</sup>В такъв случай законите за движение  $q(t)$  представляват т.нар. *екстремала* на действието и точно движения от този вид действително се реализират от гледна точка на класическата механика.

т.е. вариацията на действието е интеграл от вариацията на лагранжиана:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt. \quad (157)$$

След това използваме, че  $\delta \dot{q}_i = \frac{d(\delta q_i)}{dt}$ , и интегрираме по части втората група от събираеми в (157):

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d(\delta q_i) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{q(t_1)}^{q(t_2)} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i dt. \quad (158)$$

Тъй като работим с фиксирани краища, т.е.  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ , се получава:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \quad (159)$$

За да се нулира този интеграл, трябва подинтегралната функция да е равна на нула. Тъй като вариациите  $\delta q_i$  са произволни, в сила са следните диференциални уравнения:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, s. \quad (160)$$

Това са *уравненията на Лагранж от II род*. След заместване на конкретния лагранжиан се получават  $s$  уравнения на движение  $\ddot{q}_i = \ddot{q}_i(q, \dot{q}, t)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , от които могат да се получат законите за движение  $q_i = q_i(t)$ , а оттам и радиус-векторите  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$  на всички материални точки във всеки един момент от времето. Важно предимство на Лагранжевата формулировка на механиката в сравнение с Нютоновата формулировка е, че уравненията на Лагранж от II род са валидни във всички отправни системи, а не само в инерциални отправни системи.<sup>(22)</sup> Недостатък на този подход е, че по-трудно се работи с неконсервативни сили и затова не ги разглеждаме.

*Уравнения на Лагранж от II род за свободна частица:* Материалната точка има  $s = 3$  степени на свобода, когато няма наложени връзки. В случая обобщените координати съвпадат с Декартовите координати на частицата. Лагранжианът е

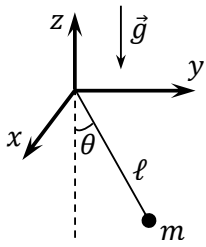
$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = T(\dot{\vec{r}}) - U(\vec{r}, t) = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(\vec{r}, t) = \sum_{j=1}^3 \frac{m\dot{x}_j \dot{x}_j}{2} - U(\vec{r}, t). \quad (161)$$

Уравненията на Лагранж от II род са

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \implies \frac{d(m\dot{x}_i)}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (162)$$

т.е. уравненията са еквивалентни на уравнението на Нютон, както и се очаква да бъдат.

<sup>(22)</sup> Въпреки че обобщените координати може да описват и неинерциална отправна система, първоначално трябва да запишем лагранжиана в инерциална (лабораторна) отправна система, в която по принцип използваме декартови координати като най-прости.



**Математично махало:** Материална точка с маса  $m$  е окачена на безмасова неразтеглива нишка с дължина  $\ell$  в полето на силата на тежестта. Нека началните условия са такива, че тялото да се движи в равнината  $x = 0$ . Може да изберем началото на координатната система да съвпада с точката на окачване на нишката. Има две наложени връзки:  $x = 0$  и  $y^2 + z^2 = \ell^2$ , т.е. системата има  $s = 3 - 2 = 1$  степен на свобода. Удобна обобщена координата е ъгълът  $\theta$  на отклонение (от положението на устойчиво равновесие) на нишката спрямо вертикалата. Съответно  $y(t) = \ell \sin \theta(t)$  и  $z(t) = -\ell \cos \theta(t)$ . Кинетичната енергия на системата е

$$T = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} = \frac{m}{2}(\ell^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + \ell^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2) = \frac{m\ell^2 \dot{\theta}^2}{2}. \quad (163)$$

Потенциалната енергия (определена с точност до константа) е

$$U = - \int_0^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_0^{\vec{r}} m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -m(\vec{g} \cdot \vec{r}) = mgz = -mg\ell \cos \theta. \quad (164)$$

Лагранжианът е

$$L = T - U = \frac{m\ell^2 \dot{\theta}^2}{2} + mg\ell \cos \theta. \quad (165)$$

Уравнението на Лагранж от II род е

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d(m\ell^2 \dot{\theta})}{dt} = -mg\ell \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0. \quad (166)$$

При ъгли на отклонение  $\theta \ll 1$  (в радиани) може да се използва, че  $\sin \theta \approx \theta$ . В такъв случай уравнението на Лагранж се превръща в уравнение на хармоничен осцилатор с кръгова честота  $\omega = \sqrt{g/\ell}$ :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0. \quad (167)$$

Общото решение на това уравнение е

$$\theta(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (168)$$

като константите  $A$  и  $B$  се определят от началните условия. Материалната точка извършва хармонични трептения с период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (169)$$

Нека сега да разгледаме ситуацията, когато нишката е отклонена на произволен ъгъл  $\theta_0$  и пусната да се люлее свободно. Движението вече не е хармонично трептене, а се описва с елиптична функция. Тъй като движението е едномерно (в термини на обобщената координата  $\theta$ ) и в полето на консервативната сила на тежестта, удобно е да използваме закона за запазване на енергията:

$$E = T + U = \frac{m\ell^2 \dot{\theta}^2}{2} - mg\ell \cos \theta = -mg\ell \cos \theta_0 = \text{const}, \quad (170)$$

който представлява обикновено диференциално уравнение, от което бихме могли да получим закона за движение  $\theta(t)$ . За простота нека да намерим само периода на трептенията на махалото. След коренуване горното уравнение придобива вида:

$$dt = \pm \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}, \quad (171)$$

като знакът отъясно се определя от това дали махалото се движи по посока на часовниковата стрелка или обратно на часовниковата стрелка. За да намерим периода  $T$ , трябва да интегрираме горното уравнение:

$$T = \sqrt{\frac{2\ell}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = 2 \sqrt{\frac{2\ell}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = 2 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}, \quad (172)$$

като сме използвали четността на подинтегралната функция. Нека да направим субституцията

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \phi \Rightarrow T = 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \phi}}. \quad (173)$$

Полученият интеграл представлява *пълен елиптичен интеграл от I род*  $K(k)$ . Тази специална функция се дефинира по следния начин:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, \quad (174)$$

като  $k$  се нарича *модул*. В нашия случай  $k = \sin \frac{\theta_0}{2}$ . Периодът на трептене може да се запише като:

$$T = 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} K(k). \quad (175)$$

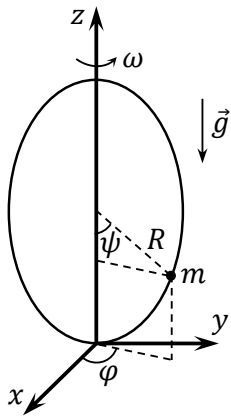
За да сравним този резултат със случая на малки отклонения от равновесното положение, ще развием пълния елиптичен интеграл в ред на Маклорен:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots + \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right)^2 k^{2n} + \dots \right]. \quad (176)$$

Така

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right]. \quad (177)$$

Вижда се, че редът е сравнително бързо сходящ, т.е. приближението за малки ъгли е оправдано. При  $\theta_0 < 20^\circ$  относителната грешка на приближената формула спрямо точния резултат за периода е по-малка от 1%.



**Топче на въртяща се вертикална окръжност:** Малко топче с маса  $m$  може да се движи без триене по протежение на вертикална окръжност с радиус  $R$ , която се върти равномерно около вертикална ос, минаваща през центъра ѝ, с ъглова скорост  $\omega$  (вж. фигурата вляво). На топчето действат силата на тежестта и центробежна сила, която следва от нестатичността на наложените връзки. Началото на координатната система се намира в най-ниската точка от окръжността. Механичната система има една степен на свобода (една материална точка е ограничена да се движи върху крива). Избираме единствената обобщена координата да бъде ъгълът  $\psi$ , показан на фигурата. Декартовите координати на топчето се изразяват по следния начин:

$$x(t) = R \sin \psi(t) \cos \omega t, \quad y(t) = R \sin \psi(t) \sin \omega t, \quad z(t) = R[1 - \cos \psi(t)], \quad (178)$$

като сме избрали в началния момент окръжността да се намира в равнината  $y = 0$ , откъдето следва, че  $\varphi = \omega t$ . Вижда се, че радиус-векторът на топчето зависи явно от времето, което е характерно за нестатични връзки. Производните по времето на декартовите координати са:

$$\dot{x} = R \cos \psi \dot{\psi} \cos \omega t - \omega R \sin \psi \sin \omega t, \quad \dot{y} = R \cos \psi \dot{\psi} \sin \omega t + \omega R \sin \psi \cos \omega t, \quad \dot{z} = R \sin \psi \dot{\psi}. \quad (179)$$

Кинетичната енергия на системата е

$$T = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} = \frac{mR^2(\dot{\psi}^2 + \omega^2 \sin^2 \psi)}{2}. \quad (180)$$

Потенциалната енергия е

$$U = mgz = mgR(1 - \cos \psi). \quad (181)$$

Лагранжианът е

$$L = T - U = \frac{mR^2(\dot{\psi}^2 + \omega^2 \sin^2 \psi)}{2} - mgR(1 - \cos \psi). \quad (182)$$

За уравнението на Лагранж от II род получаваме:

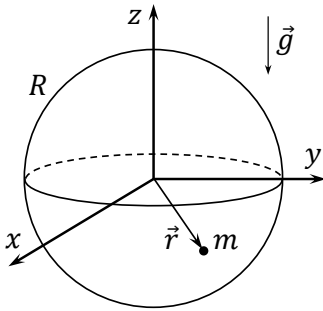
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= \frac{\partial L}{\partial \psi} \Rightarrow \frac{d(mR^2 \dot{\psi})}{dt} = m\omega^2 R^2 \sin \psi \cos \psi - mgR \sin \psi \\ &\Rightarrow \ddot{\psi} - \omega^2 \sin \psi \cos \psi + \frac{g}{R} \sin \psi = 0. \end{aligned} \quad (183)$$

Точките на равновесие на топчето се определят от условието да няма тангенциална (към окръжността) сила, която да му действа. Това води до изискването  $\ddot{\psi} = 0$ . Следователно, равновесните ъгли са решения на уравнението  $\omega^2 \sin \psi \cos \psi = \frac{g}{R} \sin \psi$ . Решенията са:

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = \pi, \quad \psi_3 = \pm \arccos \frac{g}{\omega^2 R}, \quad (184)$$

като третото решение съществува, ако  $\omega^2 \geq g/R$ ,<sup>(23)</sup> т.е. при достатъчно големи ъглови скорости на въртене на окръжността.

Най-ниската точка от окръжността ( $\psi_1 = 0$ ) е точка на устойчиво равновесие при  $\omega^2 \leq g/R$  и точка на неустойчиво равновесие при  $\omega^2 > g/R$ . Видът на равновесието се получава, като се анализира уравнението (183) в малка околност на  $\psi_1 = 0$ , развивайки тригонометричните функции в ред на Маклорен:  $\ddot{\psi} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)\psi \approx 0$ . При малки ъглови скорости това приближено уравнение описва хармонични трептения около  $\psi_1 = 0$ , т.е. има устойчиво равновесие. При големи ъглови скорости центробежната сила взема превес над силата на тежестта и равновесието се превръща в неустойчиво. Най-високата точка от окръжността ( $\psi_2 = \pi$ ) е винаги точка на неустойчиво равновесие. При  $\psi_3$  има устойчиво равновесие.



*Уравнения на Лагранж от II род за сферично махало:* Материална точка с маса  $m$  е ограничена да се движи върху сфера с радиус  $R$  в полето на силата на тежестта. Може да изберем началото на координатната система да съвпада с центъра на сферата. Има една връзка:  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , т.е. системата има  $s = 3 - 1 = 2$  степени на свобода. В случая удобни обобщени координати са ъгловите сферични координати  $\theta$  и  $\varphi$ . Съответно, разписваме декартовите координати в термини на сферичните:

$$x(t) = R \sin \theta(t) \cos \varphi(t), \quad y(t) = R \sin \theta(t) \sin \varphi(t), \quad z(t) = R \cos \theta(t). \quad (185)$$

Производните по времето на декартовите координати са:

$$\dot{x} = R \cos \theta \dot{\theta} \cos \varphi - R \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi}, \quad \dot{y} = R \cos \theta \dot{\theta} \sin \varphi + R \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi}, \quad \dot{z} = -R \sin \theta \dot{\theta}. \quad (186)$$

Кинетичната енергия на системата е

$$T = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} = \frac{mR^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)}{2}. \quad (187)$$

Потенциалната енергия е

$$U = mgz = mgR \cos \theta. \quad (188)$$

Лагранжианът е

$$L = T - U = \frac{mR^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)}{2} - mgR \cos \theta. \quad (189)$$

Уравнението на Лагранж по  $\theta$  е

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d(mR^2 \dot{\theta})}{dt} = mR^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + mgR \sin \theta \\ &\Rightarrow \ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 - \frac{g}{R} \sin \theta = 0. \end{aligned} \quad (190)$$

<sup>(23)</sup>При  $\omega^2 = g/R$  третото решение съвпада с първото, т.е.  $\psi_3 = \psi_1 = 0$ .

Уравнението на Лагранж по  $\varphi$  е

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Rightarrow \frac{d(mR^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi})}{dt} = 0 \Rightarrow mR^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = L_z = \text{const}, \quad (191)$$

където с  $L_z$  съм означил  $z$ -компонентата на момента на импулса на материалната точка. Може да заместим  $\dot{\varphi}$  в уравнението на Лагранж по  $\theta$ , за да получим уравнение само за  $\theta(t)$ :

$$\ddot{\theta} - \frac{L_z^2}{m^2 R^4} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} - \frac{g}{R} \sin \theta = 0. \quad (192)$$

14. **Обобщени импулси. Закони за запазване на обобщените импулси и пълната механична енергия. Хамилтониан и канонични уравнения на Хамилтон.**

*Обобщени импулси:* Производните на лагранжиана по обобщените скорости се наричат *обобщени импулси*:

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, s. \quad (193)$$

*Закон за запазване на обобщен импулс:* От уравненията на Лагранж от II род се вижда, че ако някоя обобщена координата  $q_j$  не присъства явно в лагранжиана, т.е.  $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ ,<sup>(24)</sup> то съответният обобщен импулс  $p_j$  се запазва:

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow p_j = \text{const}. \quad (194)$$

*Запазване на пълната механична енергия на затворена система:* Нека да разгледаме механична система, чийто лагранжиан не зависи явно от времето ( $\partial_t L = 0$ ). Всички затворени системи са от такъв тип. Това условие е еквивалентно на изискването лагранжианът да е инвариантен относно транслагации по времето, което е друга формулировка на Нютоновия постулат, че времето е хомогенно. Тогава пълната производна на лагранжиана по времето ще бъде

$$\frac{dL(q, \dot{q})}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right). \quad (195)$$

Като прехвърлим всичко отлясно, получаваме закона за запазване на пълната механична енергия на системата:<sup>(25)</sup>

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = E = \text{const}. \quad (196)$$

*Хамилтониан и канонични уравнения на Хамилтон:* Нека да видим на колко е равен

<sup>(24)</sup>Такива координати се наричат *циклични*.

<sup>(25)</sup>Строго погледнато, запазващата се величина съвпада с пълната механична енергия на системата, само ако кинетичната енергия е *хомогенна* квадратична функция на обобщените скорости. Това условие е еквивалентно на изискването радиус-векторите да не зависят явно от времето ( $\vec{r}_i(q(t))$ ,  $i = 1, \dots, N$ ), което също така означава, че няма нестатични връзки.

диференциалът на лагранжиана на произволна механична система:

$$\begin{aligned} dL(q, \dot{q}, t) &= \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \dot{p}_i dq_i + d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt, \end{aligned} \quad (197)$$

като сме използвали уравненията на Лагранж от II род. Получава се, че

$$d(p_i \dot{q}_i - L) = -\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (198)$$

т.е. комбинацията  $p_i \dot{q}_i - L$ , която дава пълната механична енергия на системата (освен в случаите на нестатични връзки), се изразява чрез диференциалите на обобщените координати, обобщените импулси и времето. С други думи  $H(q, p, t) := p_i \dot{q}_i(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t)$  е функция на обобщените координати, обобщените импулси и времето, която се нарича *хамилтониан*.<sup>(26)</sup> Ако разпишем нейния диференциал в общ вид:

$$dH(q, p, t) = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt = -\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (199)$$

виждаме, че се изпълняват следните уравнения:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, s, \quad (200)$$

които се наричат *канонични уравнения на Хамилтон*. Уравненията на Хамилтон са  $2s$  уравнения от първи ред по времето и решаването им представлява алтернативен подход към класическата механика спрямо уравненията на Лагранж. По принцип уравненията на Хамилтон не са по-удобни за решаване от съответните уравнения на Лагранж от II род. Ползата от Хамилтоновата формулировка на класическата механика се състои в по-дълбокото осмисляне на математическите структури, залегнали в основата на механиката. Хамилтоновата механика също така може по-лесно да се обобщи към статистическата механика (механиката на голям брой частици) и квантовата механика.

*Уравнения на Хамилтон за свободна частица:* Декартовите координати на материалната точка служат като обобщени координати. Лагранжианът е известен:

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} - U(x, y, z, t). \quad (201)$$

Обобщените импулси са компонентите на импулса в Декартови координати:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}. \quad (202)$$

<sup>(26)</sup> Преходът от лагранжиана  $L(q, \dot{q}, t)$  към хамилтониана  $H(q, p, t)$  е пример за трансформация на Лъжан-дър. По този начин от функция на обобщените скорости ( $L$ ) получаваме функция на обобщените импулси ( $H$ ).

Хамилтонианът се получава по следния начин:

$$H(\vec{r}, \vec{p}, t) = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + U(x, y, z, t). \quad (203)$$

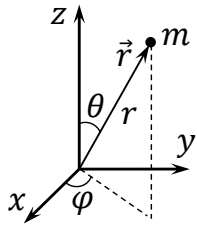
Уравненията на Хамилтон са:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}, \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}, \quad (204)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = F_y, \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial z} = F_z. \quad (205)$$

Вижда се, че уравненията на Хамилтон (205) са еквивалентни на уравнението на Нютон.

*Хамилтониан на свободна материална точка в сферични координати:* Нека отново да разгледаме движението на частица без наложени връзки, но като използваме сферични координати. Изходното положение отново е лагранжианът (201). Изразяваме Декартовите координати чрез сферичните:



$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \sin \theta(t) \cos \varphi(t), \\ y(t) &= r(t) \sin \theta(t) \sin \varphi(t), \\ z(t) &= r(t) \cos \theta(t). \end{aligned} \quad (206)$$

След сравнително дълги пресмятания (или като използваме съответните коефициенти на Ламе за сферични координати) се получава, че

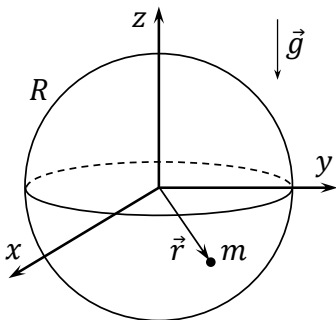
$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} - U(x, y, z, t) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - U(r, \theta, \varphi, t). \quad (207)$$

Обобщените импулси са:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}. \quad (208)$$

Хамилтонианът е

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\varphi} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + U(r, \theta, \varphi, t). \quad (209)$$



*Уравнения на Хамилтон за сферично махало:* Разгледахме сферичното махало (частица с маса  $m$ , която се движи върху сфера с радиус  $R$ , в полето на силата на тежестта) порано. Лагранжианът на механичната система е (189). Може да се забележи, че в случая  $\varphi$  е циклична координата. Съответните обобщени импулси са:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\sin^2\theta\dot{\varphi} = L_z, \quad (210)$$

където  $L_z$  е  $z$ -компонентата на момента на импулса на ма-

териалната точка. Хамилтонианът на системата е

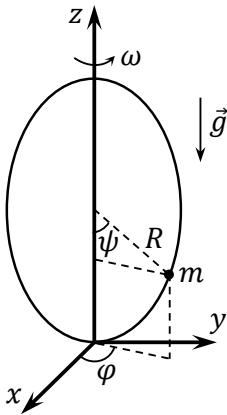
$$H(\theta, p_\theta, p_\varphi) = p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\varphi} - L = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mR^2 \sin^2 \theta} + mgR \cos \theta. \quad (211)$$

Уравненията на Хамилтон са:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2 \sin^2 \theta}, \quad (212)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\varphi^2 \cos \theta}{mR^2 \sin^3 \theta} + mgR \sin \theta, \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = L_z = \text{const}. \quad (213)$$

Може да се види, че от уравненията на Хамилтон се получава отново уравнението на Лагранж (192).



*Уравнения на Хамилтон за топче на въртяща се вертикална окръжност:* По-рано разгледахме тази механична система (малко топче с маса  $m$  се движи без триене по вертикална окръжност с радиус  $R$ , която се върти равномерно с ъглова скорост  $\omega$ ). На топчето действат силата на тежестта и центробежна сила, която следва от нестатичността на наложените връзки. Избираме единствената обобщена координата да бъде ъгълът  $\psi$ , показан на фигурата вляво. Може да се види, че кинетичната енергия на топчето не е хомогенна квадратична функция на обобщената скорост  $\dot{\psi}$ , което следва от нестатичната връзка. Лагранжианът на системата е

$$L = T - U = \frac{mR^2(\dot{\psi}^2 + \omega^2 \sin^2 \psi)}{2} - mgR(1 - \cos \psi). \quad (214)$$

Обобщеният импулс е  $p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = mR^2 \dot{\psi}$ . Хамилтонианът е

$$H = p_\psi \dot{\psi} - L = \frac{p_\psi^2}{2mR^2} - \frac{mR^2 \omega^2 \sin^2 \psi}{2} + mgR(1 - \cos \psi). \quad (215)$$

Забележете, че тъй като има нестатична връзка, хамилтонианът не е равен на пълната механична енергия на системата

$$E = T + U = \frac{mR^2(\dot{\psi}^2 + \omega^2 \sin^2 \psi)}{2} + mgR(1 - \cos \psi) = \frac{p_\psi^2}{2mR^2} + \frac{mR^2 \omega^2 \sin^2 \psi}{2} + mgR(1 - \cos \psi). \quad (216)$$

В този случай се запазва хамилтонианът, тъй като  $L$  и  $H$  не зависят явно от времето, но не и пълната механична енергия. Уравненията на Хамилтон са

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial p_\psi} = \frac{p_\psi}{mR^2}, \quad \dot{p}_\psi = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = mR^2 \omega^2 \sin \psi \cos \psi - mgR \sin \psi. \quad (217)$$

Двете уравнения се свеждат до уравнението на Лагранж от II род (183).

15. Скобки на Поасон: основни свойства. Канонични комутационни съотношения в класическата механика. Скобки на Поасон между обобщените координати, обобщените импулси и момента на импулса.

Скобките на Поасон са диференциални оператори, които съпоставят на две функции на обобщените координати, обобщените импулси и времето трета функция<sup>(27)</sup> по следния начин:

$$\{f(q, p, t), g(q, p, t)\} := \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, s, \quad (218)$$

като подразбираме сумиране по повтарящите се индекси. Лесно се вижда, че ако някой от аргументите е константа, скобката на Поасон е равна на нула:  $\{f, C\} = 0$ . От дефиниционното уравнение (218) могат да се изведат следните основни свойства:

1) антикомутативност:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} = - \left( \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) = -\{g, f\}; \quad (219)$$

2) линейност:  $\{\alpha f_1 + \beta f_2, g\} = \alpha\{f_1, g\} + \beta\{f_2, g\}$ , където  $\alpha, \beta = \text{const}$ ;

3) правило на Лайбниц:

$$\begin{aligned} \{f_1 f_2, g\} &= \frac{\partial(f_1 f_2)}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial(f_1 f_2)}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} = f_1 \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \\ &\quad - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} = f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2; \end{aligned} \quad (220)$$

4) тъждество на Якоби:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0, \quad (221)$$

откъдето следва, че физичните величини образуват алгебра на Ли с умножение, което се определя от скобките на Поасон.

Нека да разгледаме пълната производна по времето на произволна функция на обобщените координати, обобщените импулси и времето:

$$\frac{df(q, p, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (222)$$

където сме използвали уравненията на Хамилтон. Нека функцията да не зависи явно от времето ( $\partial f / \partial t = 0$ ). Вижда се, че необходимото и достатъчно условие тази функция да е запазваща се величина, е  $\{f, H\} = 0$ .<sup>(28)</sup>

С помощта на скобките на Поасон уравненията на Хамилтон придобиват симетрична форма:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad (223)$$

<sup>(27)</sup> Всички физични величини представляват подобни функции.

<sup>(28)</sup> С помощта на тъждеството на Якоби (221) може да се докаже, че ако две функции  $f$  и  $g$  се запазват, то тяхната скобка на Поасон  $\{f, g\}$  също се запазва (теорема на Поасон):  $\{\{f, g\}, H\} = \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} = 0$ .

където сме използвали (222). Изпълняват се също така следните съотношения:

$$\{q_j, f\} = \frac{\partial q_j}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial q_j}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} = \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial p_j}, \quad (224)$$

$$\{p_j, f\} = \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} = -\delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial q_i} = -\frac{\partial f}{\partial q_j}. \quad (225)$$

Скобките на Поасон между обобщените координати и импулси се наричат *канонични комутационни съотношения*:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} = \delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ij}. \quad (226)$$

Като се използват свойствата на скобките на Поасон, всички скобки могат да се сведат до каноничните скобки, така че те формират нещо като базис в пространството от всички скобки на Поасон. Нека с тяхна помощ да изведем скобките между основни физични величини ( $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  е моментът на импулса на частица):

$$\begin{aligned} \{x_i, L_j\} &= \{x_i, \varepsilon_{jkl} x_k p_l\} = \varepsilon_{jkl} \{x_i, x_k p_l\} = \varepsilon_{jkl} \{x_i, x_k\} p_l + \varepsilon_{jkl} \{x_i, p_l\} x_k = \varepsilon_{jkl} \delta_{il} x_k = \varepsilon_{ijk} x_k, \\ \{p_i, L_j\} &= \{p_i, \varepsilon_{jkl} x_k p_l\} = \varepsilon_{jkl} \{p_i, x_k p_l\} = \varepsilon_{jkl} \{p_i, x_k\} p_l + \varepsilon_{jkl} \{p_i, p_l\} x_k = -\varepsilon_{jkl} \delta_{ki} p_l = \varepsilon_{ijl} p_l, \\ \{L_i, L_j\} &= \{\varepsilon_{ikl} x_k p_l, L_j\} = \varepsilon_{ikl} \{x_k, L_j\} p_l + \varepsilon_{ikl} \{p_l, L_j\} x_k = \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{kjm} x_m p_l + \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{ijm} p_m x_k \\ &= (\delta_{ij} \delta_{im} - \delta_{im} \delta_{ij}) x_m p_l + (\delta_{ij} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kj}) p_m x_k = x_i p_j - \delta_{ij} x_l p_l + \delta_{ij} p_k x_k - p_i x_j \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) x_l p_m = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} x_l p_m = \varepsilon_{ijk} L_k, \end{aligned} \quad (227)$$

$$\{L_i, L^2\} = \{L_i, L_j L_j\} = 2\{L_i, L_j\} L_j = 2\varepsilon_{ijk} L_k L_j = 2(\vec{L} \times \vec{L})_i = 0. \quad (228)$$

*Закони за запазване и скобки на Поасон:* Законите за запазване на физични величини се проверяват лесно с помощта на скобките на Поасон. Ако хамилтонианът на дадена механична система не зависи явно от времето и приложим (222) за  $f = H$ , ще получим, че пълната производна на хамилтониана по времето е нула. Следователно, ако няма нестатични връзки, пълната механична енергия на системата се запазва. Ако имаме свободна частица, то  $U = 0$  и  $H = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ . Тогава

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = \left\{p_i, \frac{\vec{p}^2}{2m}\right\} = \mathcal{Z}\{p_i, p_j\} \frac{p_j}{2m} = 0, \quad (229)$$

т.е. импулсът се запазва. За материална точка в поле на централна сила  $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(r)$  и

$$\begin{aligned} \frac{dL_i}{dt} &= \{L_i, H\} = \left\{L_i, \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(r)\right\} = \left\{L_i, \frac{\vec{p}^2}{2m}\right\} + \{L_i, U(r)\} = \mathcal{Z}\{L_i, p_j\} \frac{p_j}{2m} + \{L_i, U(r)\} \\ &= \frac{\varepsilon_{ijk} p_j p_k}{m} + \{\varepsilon_{ijk} x_j p_k, U(r)\} = \frac{(\vec{p} \times \vec{p})_i}{m} + \varepsilon_{ijk} x_j \{p_k, U(r)\} \\ &= -\varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial U(r)}{\partial x_k} = -\varepsilon_{ijk} x_j U'(r) \frac{\partial r}{\partial x_k} = -\varepsilon_{ijk} x_j x_k \frac{U'(r)}{r} = -\frac{U'(r)}{r} (\vec{r} \times \vec{r})_i = 0, \end{aligned} \quad (230)$$

т.е. запазва се моментът на импулса.

16. Идеално твърдо тяло. Тензор на инерчния момент: главни инерчни оси. Теорема на Щайнер за тензора на инерчния момент.

*Идеално твърдо тяло* представлява механична система от  $(N)$  материални точки, като разстоянието между които и да е две от тях е фиксирано:  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{const} \forall i, j = 1, \dots, N$ . От тези наложени условия върху положенията на частиците следва, че има  $3N - 6$  връзки, т.е. системата има шест степени на свобода. Тялото може да се движи транслационно (в този случай по принцип се разглежда движението на центъра на масите) и ротационно (често е удобно да се разглежда въртене относно центъра на масите), като на всеки от тези два начина на движение съответстват по три степени на свобода.

Нека да се концентрираме върху ротациите на идеално твърдо тяло. По-рано доказахме, че линейната скорост на една материална точка, която се върти с ъглова скорост  $\vec{\omega}$  около някаква ос, се дава с израза  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ . Основна характеристика на твърдото тяло е, че всички негови точки се въртят с една и съща ъглова скорост, тъй като са неподвижно свързани една с друга, т.е.  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \forall i = 1, \dots, N$ . Лесно се проверява това изискване:

$$\frac{d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2}{dt} = 2(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 2[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)] \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0. \quad (231)$$

Ротационната кинетична енергия на идеално твърдо тяло е

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} [\vec{\omega}^2 r_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2] = \frac{1}{2} \omega_a I_{ab} \omega_b, \quad a, b = 1, 2, 3, \quad (232)$$

където  $I_{ab} = \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 \delta_{ab} - (\vec{r}_i)_a (\vec{r}_i)_b]$  са компонентите на т.нар. *тензор на инерчния момент*  $\hat{I}$ . Лесно може да се провери, че

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^N m_i x_i y_i & -\sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \\ -\sum_{i=1}^N m_i x_i y_i & \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \\ -\sum_{i=1}^N m_i x_i z_i & -\sum_{i=1}^N m_i y_i z_i & \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}. \quad (233)$$

Съответните компоненти на тензора на инерчния момент за непрекъснатото тяло, което се характеризира с разпределение на плътността  $\rho(\vec{r})$ , са

$$I_{ab} = \int_V \rho(\vec{r}) (\vec{r}^2 \delta_{ab} - x_a x_b) dV, \quad (234)$$

т.е. сумата се заменя с интеграл по обема на тялото.

Лесно се вижда, че  $I_{ab} = I_{ba}$ , т.е. тензорът  $\hat{I}$  е симетричен. Оттук следва, че  $\hat{I}$  може да се диагонализира, т.е. съществува ортогонална матрица  $\hat{O}$ , такава че  $\hat{O} \cdot \hat{I} \cdot \hat{O}^t = \hat{I}' = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  в базис от собствените вектори на  $\hat{I}$ . Собствените вектори определят т.нар. *главни инерчни оси*, които зависят от симетриите на тялото. Собствените стойности на тензора на инерчния момент  $I_{1,2,3} \geq 0$  се наричат *главни инерчни моменти*. Кинематичните свойства на идеалното твърдо тяло изцяло се определят от неговата маса, главни инерчни оси и главни инерчни моменти.

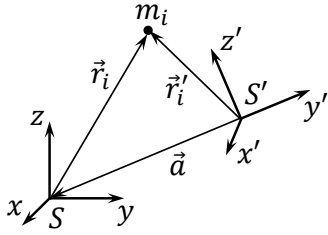
Главните инерчни моменти удовлетворяват неравенството на триъгълника (в базис

от собствените вектори на  $\hat{I}$ ):

$$I_1 + I_2 = \int_V \rho(\vec{r})(x^2 + y^2 + 2z^2)dV \geq \int_V \rho(\vec{r})(x^2 + y^2)dV = I_3, \quad (235)$$

като за удобство работим с непрекъснато тяло.

Графично инерчния момент може да бъде представен чрез т.нар. *инерчен елипсоид*. В зависимост от стойностите на  $I_{1,2,3}$  идеалните твърди тела се класифицират в един от следните три вида: 1)  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$  (асиметричен пумпал); 2)  $I_1 = I_2 \neq I_3$  (симетричен пумпал); 3)  $I_1 = I_2 = I_3$  (сферичен пумпал).



*Теорема на Щайнер за тензора на инерчния момент:* Тензорът на инерчния момент е с “минимални” компоненти  $I'_{bc}$  спрямо системата на центъра на масите, която ще означим с  $S'$  (вж. фигурата вляво). Спрямо произволна отправна система  $S$ , отместена спрямо  $S'$  на вектор  $\vec{a}$ , компонентите на тензора на инерчния момент са  $I_{bc} = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{r}'_i{}^2 \delta_{bc} - (\vec{r}'_i)_b (\vec{r}'_i)_c]$ , като  $\vec{r}_i = \vec{r}'_i - \vec{a}$ . Теоремата на Щайнер, която изразява  $I_{bc}$  чрез  $I'_{bc}$ , се получава след преобразуване на израза за  $I_{bc}$ :

$$\begin{aligned} I_{bc} &= \sum_{i=1}^N m_i [(\vec{r}'_i - \vec{a})^2 \delta_{bc} - (\vec{r}'_i - \vec{a})_b (\vec{r}'_i - \vec{a})_c] = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{r}'_i{}^2 \delta_{bc} - (\vec{r}'_i)_b (\vec{r}'_i)_c] \\ &+ \sum_{i=1}^N m_i (\vec{a}^2 \delta_{bc} - a_b a_c) = I'_{bc} + M(\vec{a}^2 \delta_{bc} - a_b a_c), \end{aligned} \quad (236)$$

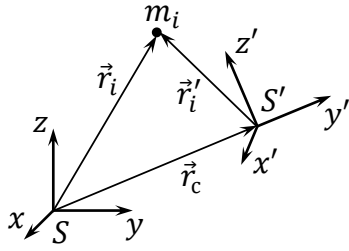
като сме използвали, че  $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i = 0$  (радиус-векторът на центъра на масите в системата на центъра на масите е нулевият вектор).

В частния случай, когато разглеждаме инерчния момент спрямо две успоредни оси, се получава (нека системите  $S$  и  $S'$  да са еднакво ориентирани, а успоредните оси да са  $Oz$  и  $O'z'$ ):

$$I_{zz} = I'_{zz} + M(\vec{a}^2 \delta_{zz} - a_z a_z) = I'_{zz} + M(a_x^2 + a_y^2) = I'_{zz} + Md^2, \quad (237)$$

където с  $d$  сме означили разстоянието между двете успоредни оси. Този частен случай има широко приложение: инерчният момент на дадено тяло спрямо произволна ос на въртене е равен на сумата от инерчния момент на тялото спрямо успоредна ос, минаваща през центъра на масите на тялото, и произведението от масата на тялото и разстоянието между осите на квадрат.

17. Теорема на Кьониг за кинетичната енергия на идеално твърдо тяло. Момент на импулса на идеално твърдо тяло. Уравнения на Ойлер.



*Теорема на Кьониг за кинетичната енергия на идеално твърдо тяло:* Нека да разгледаме произволно движение на идеално твърдо тяло, което винаги може да се опише като транслационно движение на неговия център на масите и въртене на тялото около центъра му на масите. Радиус-векторите на точките от тялото могат да се представят като  $\vec{r}_i(t) = \vec{r}_c(t) + \vec{r}'_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , където  $\vec{r}'_i$  описва положението на  $i$ -тата материална точка от тялото относно неговия център на масите (вж. фигурата по-горе).

Оттук кинетичната енергия на идеалното твърдо тяло може да се представи по следния начин (теорема на Кьониг):

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\vec{r}}_c + \dot{\vec{r}}'_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}'_i^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2 = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_c^2 + \frac{1}{2} \omega_a I'_{ab} \omega_b = T_c + T', \end{aligned} \quad (238)$$

като сме използвали, че  $\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}'_i = \frac{d}{dt} (\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i) = 0$  (радиус-векторът на центъра на масите в системата на центъра на масите е нулевият вектор). С  $T_c$  сме означили транслационната кинетична енергия на (центъра на масите на) тялото, а  $T'$  е ротационната кинетична енергия на тялото относно неговия център на масите. Както се вижда, теоремата на Кьониг ни дава пореден довод за полезността на отправната система свързана с центъра на масите на идеално твърдо тяло.

Моментът на импулса на идеално твърдо тяло е

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{r}_i^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \vec{r}_i] = \hat{I} \cdot \vec{\omega}. \quad (239)$$

От това представяне следва, че ъгловата скорост  $\vec{\omega}$  не е насочена по посока на момента на импулса  $\vec{L}$  в общия случай. Посоките на  $\vec{\omega}$  и  $\vec{L}$  съвпадат при въртене около главна инерчна ос или ако тялото е сферичен пумпал. Може да се наблюдава напр. въртене на  $\vec{\omega}$  около  $\vec{L}$ , което се нарича в зависимост от случая *прецесия* или *нутація*.

*Уравнения на Ойлер:* Както вече знаем, аналогът на уравнението на Нютон за ротации е  $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ , където  $\vec{M}$  е въртящият момент. Нека за удобство да разложим момента на импулса по главните инерчни оси на тялото. Това означава, че ще работим в неинерциална отправна система, която е неподвижно свързана с тялото. Така  $\vec{L} = L_a(t) \vec{e}_a(t)$ , където  $L_a = I_a \omega_a$  (без сумиране по повтарящите се индекси). Единичните вектори  $\vec{e}_a$  са неподвижно свързани с въртящото се тяло и са насочени по неговите главни инерчни оси, т.е. те се въртят като радиус-векторите на точките от тялото. Оттук имаме, че  $\dot{\vec{e}}_a = \vec{\omega} \times \vec{e}_a$ , откъдето

$$\dot{\vec{L}} = \dot{L}_a \vec{e}_a + L_a \dot{\vec{e}}_a = \dot{L}_a \vec{e}_a + L_a (\vec{\omega} \times \vec{e}_a) = \dot{L}_a \vec{e}_a + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{M} = M_a \vec{e}_a. \quad (240)$$

Като разпишем по компоненти  $\vec{\omega} \times \vec{L}$  в базиса от  $\vec{e}_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ , ще получим следните три уравнения на Ойлер:

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = M_1, \quad I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = M_2, \quad I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = M_3. \quad (241)$$

Решаването на тези уравнения е трудна задача в общия случай, затова ще разгледаме само частните случаи на сферичен и симетричен пумпал.

За сферичен пумпал главните инерчни моменти съвпадат ( $I_1 = I_2 = I_3 = I$ ), така че уравненията на Ойлер се свеждат към по-простите уравнения  $I \dot{\omega}_a = M_a$ , т.е.  $I \dot{\vec{\omega}} = I \vec{\varepsilon} = \vec{M}$ , което е напълно аналогично на уравнението на Нютон за транслационното движение на една материална точка.

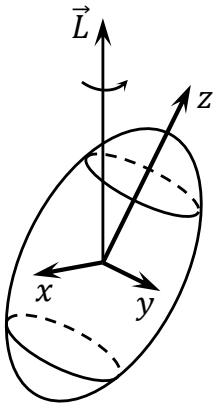
Нека да разгледаме случая на симетричен пумпал ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ ) при  $\vec{M} = 0$  (свободно въртене). Тогава третото уравнение от (241) придобива вида  $I_3 \dot{\omega}_3 = 0$ , откъдето  $\omega_3 = \text{const}$ . Останалите две уравнения на Ойлер са:

$$\dot{\omega}_1 - \Omega \omega_2 = 0, \quad \dot{\omega}_2 + \Omega \omega_1 = 0, \quad (242)$$

където  $\Omega = \omega_3(I_1 - I_3)/I_1$ . За да решим горните две уравнения, въвеждаме комплексната ъглова скорост  $\tilde{\omega} = \omega_1 + i\omega_2$ , за която е изпълнено, че  $\dot{\tilde{\omega}} = -i\Omega \tilde{\omega}$ . Общото решение на това уравнение с разделящи се променливи е  $\tilde{\omega}(t) = \tilde{C} e^{-i\Omega t} = (C_1 + iC_2)(\cos \Omega t - i \sin \Omega t)$ , откъдето следва, че

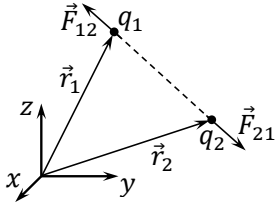
$$\omega_1 = \omega_{01} \cos \Omega t + \omega_{02} \sin \Omega t, \quad \omega_2 = \omega_{02} \cos \Omega t - \omega_{01} \sin \Omega t, \quad (243)$$

като е изпълнено, че  $\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 = \text{const}$ . В неинерциалната отправна система, свързана с въртящото се тяло, векторът  $\vec{\omega}$  се върти около оста  $\vec{e}_3$ , като посоката на въртене зависи от знака на  $\Omega$ . В "лабораторната" инерциална отправна система се наблюдава "клатушкане" на  $\vec{e}_3$  около  $\vec{L}$ , както е показано на фигурата вляво.



## II. Електродинамика

1. Закон на Кулон. Електростатично поле на системи от заряди: точкови и непрекъснато разпределени. Закон на Гаус.



Силата на взаимодействие между два неподвижни точкови заряда  $q_1$  и  $q_2$  (вж. фигурата вляво) се дава от експериментално установения закон на Кулон:

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\vec{F}_{21}. \quad (244)$$

$\vec{F}_{12}$  е силата, с която зарядът  $q_2$  действа на заряда  $q_1$ , а  $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$  F/m е диелектричната проницаемост на вакуума.

Нека да разгледаме система от  $N$  неподвижни точкови заряда, които действат на някакъв друг заряд  $q > 0$  (т.нар. пробен заряд), разположен в точка от пространството с радиус-вектор  $\vec{r}$ . Силата, която му оказва системата от заряди, е

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \frac{q q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = q \sum_{i=1}^N \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = q \vec{E}(\vec{r}), \quad (245)$$

като сме използвали принципа на суперпозицията. Вижда се, че въздействието на системата от заряди може да се опише чрез векторното поле  $\vec{E}(\vec{r})$ , което се нарича *електричен интензитет*. Интензитетът, създаван от  $i$ -тия заряд от системата, е

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = -\text{grad} \left( \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) = -\text{grad} U_i(\vec{r}). \quad (246)$$

Тогава

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}) = -\sum_{i=1}^N \text{grad} U_i(\vec{r}) = -\text{grad} \sum_{i=1}^N U_i(\vec{r}) = -\text{grad} U(\vec{r}), \quad (247)$$

където спомагателното скаларно поле

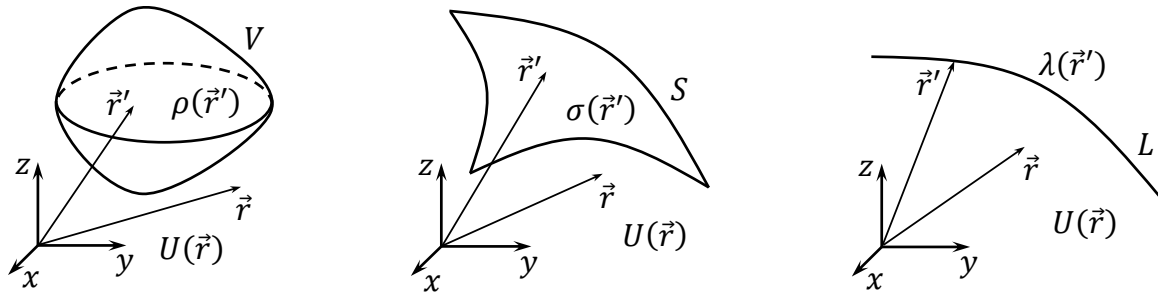
$$U(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (248)$$

се нарича *потенциал* на електростатичното поле.

В задачите, които представляват интерес за нас, няма да имаме точкови заряди, а непрекъснато разпределени. Например, зарядите могат да бъдат обемно разпределени с плътност  $\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$ . По аналогичен начин могат да се дефинират повърхнинни заряди с плътност  $\sigma(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$  и линейни заряди с плътност  $\lambda(\vec{r}) = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta \ell} = \frac{dq}{d\ell}$ . По принцип ще разглеждаме само положителни заряди.

Както видяхме по-горе, при точкови заряди потенциалът е сума от потенциалите, създавани от отделните заряди. При непрекъснато разпределени заряди сумата се заменя с подходящо избран интеграл. По принцип ще примоваме радиус-векторите на съставните елементи на заредения обект, който може да бъде обемно тяло, ограничена повърхнина,

ограничена крива или съвкупност от материални точки.



При обемно разпределени заряди използваме следния обем (троен) интеграл:

$$U(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (249)$$

където интегрираме по целия зареден обем, както е показано на фигурата горе вляво.

При повърхнинни заряди имаме следния повърхнинен интеграл от I род:

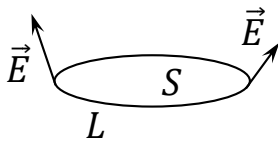
$$U(\vec{r}) = \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') dS'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (250)$$

където интегрираме по протежение на заредената повърхност, както е показано на средната фигура по-горе.

При линейно разпределени заряди трябва да се пресметне следния криволинеен интеграл от I род:

$$U(\vec{r}) = \int_L \frac{\lambda(\vec{r}') d\ell'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (251)$$

където интегрираме по заредената крива ( $d\ell' \equiv |d\vec{r}'|$ ), както е показано на фигурата горе вдясно.



По-горе установихме, че полето  $\vec{E}(\vec{r})$  може да се опише чрез  $U(\vec{r})$ , като  $\vec{E} = -\nabla U$ .<sup>(29)</sup> Това представяне е следствие от консервативността на Кулоновата сила:  $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = -q\nabla U(\vec{r}) = -\nabla W(\vec{r})$ , т.е. потенциалната енергия на заряд в електрично поле е  $W(\vec{r}) = qU(\vec{r})$ . Тъй като  $\vec{E} = -\nabla U$ , то  $\text{rot } \vec{E} = -\text{rot grad } U(\vec{r}) = 0$ ,

т.е. електростатичното поле е безвихрово и, съответно, циркуляцията на полето по произволен затворен контур  $L$  е равна на нула (вж. фигурата вляво):

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (252)$$

където  $S$  е площта на повърхнината, заградена от контура.

Нека сега да разгледаме дивергенцията на електричния интензитет на обемно разпределени заряди, за да получим *диференциалната форма на закона на Гаус*:

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = -\text{div grad } U(\vec{r}) = -\Delta U(\vec{r}) = -\Delta \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (253)$$

<sup>(29)</sup>Оттук се вижда, че потенциалът е определен с точност до адитивна константа, тъй като физически наблюдаемият интензитет не се влияе от добавянето на константа към потенциала.

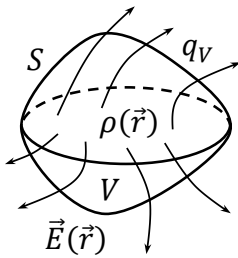
$$= -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \Delta \left( \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \rho(\vec{r}') dV' = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0},$$

където  $\delta(\vec{r} - \vec{r}') \equiv \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z')$  е тримерната делта-функция на Дирак.<sup>(30)</sup> Използвами сме също така, че  $\Delta \left( \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ .<sup>(31)</sup> От закона на Гаус (253) се получава следното частно диференциално уравнение от втори ред за потенциала (уравнение на Поасон):

$$\Delta U(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}. \quad (254)$$

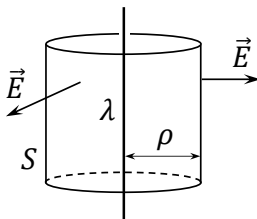
Във вакуум ( $\rho = 0$ ) уравнението на Поасон преминава в уравнение на Лаплас:  $\Delta U = 0$ , т.е. потенциалът е хармонична функция.

Ако разгледаме следния интеграл по произволна затворена повърхнина  $S$  (с помощта на теоремата на Гаус):



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV = \frac{q_V}{\varepsilon_0}, \quad (255)$$

получаваме интегралната форма на закона на Гаус, която гласи, че потокът на електричния интензитет през произволна затворена повърхнина  $S$  е пропорционален на алгебричната сума на зарядите  $q_V$ , затворени в повърхнината. Тази формулировка на закона на Гаус е полезна, когато се разглеждат симетрични конфигурации от заряди. Тогава може да изберем затворената повърхнина така, че интензитетът да е перпендикулярен и с постоянна големина върху нея, при което пресмятането на интеграла е елементарно, или интензитетът да е тангенциален на повърхнината, което води до нулев принос към потока.



*Поле на заредена права:* Безкрайно дълга права е заредена равномерно с линейна плътност на зарядите  $\lambda$ . Зарядите притежават аксиална симетрия (инвариантност относно въртене около правата) и транслационна симетрия по протежение на правата. Следователно електричният потенциал може да зависи само от разстоянието  $\rho$  до правата:  $U = U(\rho)$ . Съответният електричен интензитет  $\vec{E} = -\nabla U$ , създаван от правата, е радиално перпендикулярен на нея и може да зависи само от  $\rho$ :  $\vec{E} = E(\rho)\vec{e}_\rho$ , където  $\vec{e}_\rho$  е радиален на заредената права вектор с единична дължина. За да намерим интензитета чрез закона на Гаус, разглеждаме цилиндър с дължина  $\ell$  и ос, която съвпада с правата. Площта на околната повърхнина на цилиндъра е  $\Delta S = 2\pi\rho\ell$ , където  $\rho$  е радиусът на цилиндъра. Потокът на полето през цилиндъра е

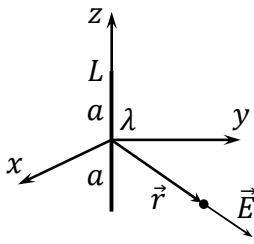
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(\rho)\Delta S = 2\pi\rho\ell E(\rho) = \frac{q_V}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda\ell}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda\vec{e}_\rho}{2\pi\varepsilon_0\rho}, \quad (256)$$

<sup>(30)</sup> Делта-функцията  $\delta(x)$  представлява обобщена функция, чието основно свойство е, че  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$ , откъдето  $\int_V \delta(\vec{r}) dV = 1$ , като се интегрира по обем, който обхваща началото на координатната система. Може да си представим  $\delta$ -функцията като функция, която е нула навсякъде, освен в нулите на аргумента си, където става безкрайно голяма. В (253) сме използвали също, че  $\int_V f(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV' = f(\vec{r})$ .

<sup>(31)</sup> От това равенство следва, че Грийновата функция за уравнението на Поасон (254) е  $\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}$ , откъдето (249) се интерпретира по естествен начин като решение на (254) с нулеви гранични условия на безкрайност.

т.е. големината на полето е обратно пропорционална на разстоянието до правата.

*Електростатично поле на заредена отсечка:* Отсечка  $L$  с дължина  $2a$  е равномерно заредена с линейна плътност на зарядите  $\lambda$ . Избираме координатната система така, че отсечката да лежи на оста  $Oz$  от  $z = -a$  до  $z = a$ . Потенциалът, който създават зарядите, е



$$U(\vec{r}) = \int_L \frac{\lambda d\ell'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{dz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}}. \quad (257)$$

Въвеждаме нова интеграционна променлива  $u = z' - z$ , като

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a-z}^{a-z} \frac{du}{\sqrt{x^2 + y^2 + u^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \sqrt{x^2 + y^2 + u^2} + u \right) \Big|_{u=-a-z}^{u=a-z} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2} - z + a}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2} - z - a} \right). \end{aligned} \quad (258)$$

Съответният интензитет може да се получи от равенството  $\vec{E} = -\text{grad } U$ . За удобство нека да разгледаме полето в равнината  $z = 0$ , т.е. в точки симетрично разположени спрямо двата края на отсечката. Тогава

$$U(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2} + a}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2} - a} \right). \quad (259)$$

От симетрията следва, че полето е радиално и може да се представи във вида:

$$U(\rho) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{\sqrt{\rho^2 + a^2} + a}{\sqrt{\rho^2 + a^2} - a} \right). \quad (260)$$

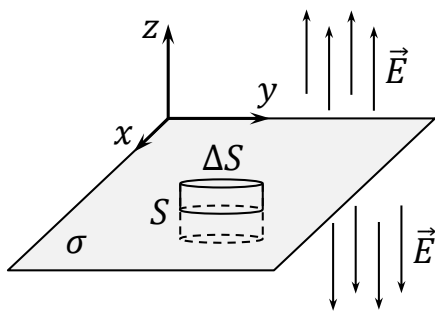
Интензитетът може да се пресметне посредством потенциала, като в общия случай

$$\vec{E}(\rho) = -\nabla U(\rho) = \frac{a\lambda\vec{e}_\rho}{2\pi\epsilon_0\rho\sqrt{\rho^2 + a^2}}, \quad (261)$$

където  $\vec{e}_\rho$  е единичен радиален на  $z$ -оста вектор. Ако разгледаме границата

$$\frac{\rho}{a} \rightarrow 0 \Rightarrow \vec{E}(\rho \ll a) \approx \frac{\lambda\vec{e}_\rho}{2\pi\epsilon_0\rho}, \quad (262)$$

т.е. възстановява се резултатът (256) за полето на безкрайна права, който изведохме от закона на Гаус.



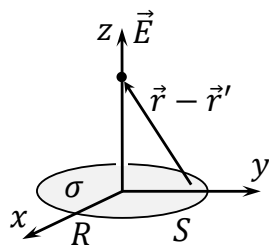
**Поле на заредена равнина:** Безкрайната равнина  $z=0$  е хомогенно заредена с повърхнинна плътност на зарядите  $\sigma$ , както е показано на фигурата вляво. Системата е инвариантна относно трансляции по  $x$ - и  $y$ -направленията. От тези симетрии следва, че електричният потенциал не зависи от  $x$  и  $y$ :  $U = U(z)$ . Електричният интензитет, създаван от равнината, е перпендикулярен на нея и може да зависи само от разстоянието до равнината:  $\vec{E} = -\text{grad } U =$

$E_z(z)\vec{e}_z$ , като  $E_z(-z) = -E_z(z)$ . За да намерим интензитета чрез закона на Гаус, разглеждаме перпендикулярен на равнината цилиндър с височина  $2z$  ( $z > 0$ ) и площ на основите  $\Delta S$  (вж. фигурата по-горе). Потокът на полето през цилиндъра е

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E_z(z)\Delta S = \frac{q_V}{\epsilon_0} = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0} \Rightarrow E_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z|, \quad (263)$$

т.е. полето е хомогенно и не зависи от разстоянието до заредената равнина. Вижда се, че електричният интензитет е прекъснат върху равнината:  $E_z(z > 0) - E_z(z < 0) = \sigma/\epsilon_0$ , което илюстрира скока на нормалната компонента на интензитета върху заредена повърхност (275).

**Поле на зареден диск:** Диск с радиус  $R$  е равномерно зареден с повърхнинна плътност на зарядите  $\sigma$ . Избираме координатната система по такъв начин, че дискът да лежи в равнината  $z = 0$  и оста  $Oz$  да минава през центъра на диска. Потенциалът, който създават зарядите по оста  $Oz$ , е



$$U(z) = \int_S \frac{\sigma dS'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{dx' dy'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}}. \quad (264)$$

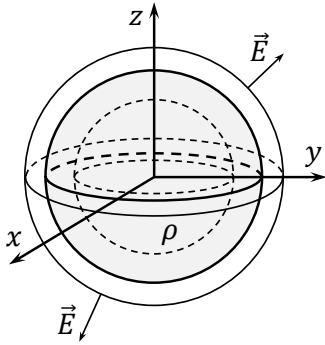
Преминаваме към полярни координати в равнината  $z = 0$ , като

$$U(z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{\rho^2 + z^2} \Big|_{\rho=0}^{\rho=R} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + z^2} - |z|). \quad (265)$$

Интензитетът върху оста  $Oz$  има вида  $\vec{E}(z) = E_z(z)\vec{e}_z$  поради аксиалната симетрия и може да се изрази чрез потенциала:

$$E_z(z) = -\frac{dU}{dz} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right), & z > 0; \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right), & z < 0. \end{cases} \quad (266)$$

Както се вижда, потенциалът е непрекъснат върху диска, докато интензитетът търпи скок:  $E_{\text{над}}^{\perp}(0) - E_{\text{под}}^{\perp}(0) = \sigma/\epsilon_0$ , което представлява пример за скока на нормалната компонента на интензитета върху заредени повърхности (275). В границата  $z \ll R$  (много близо до диска) получаваме полето, което създава хомогенно заредена равнина (263).



**Електростатично поле на хомогенно заредено кълбо:** Нека да разгледаме кълбо с радиус  $R$ , което е равномерно заредено с обемна плътност на зарядите  $\rho$ . Избираме началото на координатната система да е в центъра на кълбото. Поради сферичната симетрия полето е радиално и зависи само от дължината на радиус-вектора:  $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ , където  $\vec{e}_r$  е единичен вектор, насочен навън от центъра на кълбото.

За да намерим полето извън кълбото, разглеждаме потока на интензитета през концентрична (на кълбото) сфера с радиус  $r \geq R$ . Тогава от закона на Гаус имаме:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_V}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{4\pi\rho R^3}{3\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (267)$$

където  $Q$  е пълният заряд на кълбото, т.е. полето е като на точков заряд, разположен в центъра на кълбото (вж. фигурата по-горе).

Полето във вътрешността на кълбото може да се намери, ако разгледаме потока на интензитета през сфера с радиус  $r < R$ :

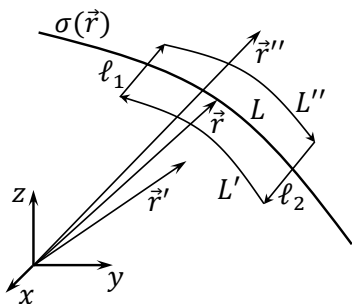
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_V}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{4\pi\rho r^3}{3\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}, \quad (268)$$

т.е. полето се изменя линейно.

## 2. Диференциални уравнения и гранични условия за електростатичното поле във вакуум.

Основна цел в електростатиката е да се намери полето  $\vec{E}(\vec{r})$  при дадено разпределение на зарядите. В общия случай, това означава, че трябва да се решат двете<sup>(32)</sup> частни диференциални уравнения от първи ред:

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}, \quad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = 0. \quad (269)$$



За еднозначното решаване на горните уравнения трябва да се наложат т.нар. гранични условия – да се фиксират стойностите на полето върху определени повърхнини. Стандартно се приема, че полето на безкрайност е равно на нула, когато зарядите са ограничени в пространството. Върху повърхности с ненулева повърхнинна плътност на зарядите ( $\sigma(\vec{r}) \neq 0$ ) е необходимо да се наложат допълнителни условия по следния начин. Нека да въведем следните означения: полето непосредствено “под” заредена повърхнина (разглеждаме ориентирани повърхнини, т.е. с добре дефиниран нормален вектор към тях) ще означаваме с  $\vec{E}_{\text{под}}(\vec{r}) = \lim_{\vec{r}'' \rightarrow \vec{r}} \vec{E}(\vec{r}'')$ , а полето непосредствено “над” повърхнината нека бъде  $\vec{E}_{\text{над}}(\vec{r}) = \lim_{\vec{r}' \rightarrow \vec{r}} \vec{E}(\vec{r}')$ . Означили сме радиус-векторите на точките под повърхнината с  $\vec{r}'$ , а радиус-векторите на точките над повърхнината – с  $\vec{r}''$ , както

<sup>(32)</sup>Уравненията са всъщност четири, тъй като второто уравнение е векторно.

е показано на фигурата по-горе. Разглеждаме ориентиран затворен контур, съставен от четири части. С  $\ell_1$  и  $\ell_2$  означаваме частите от контура, които пробождат заредената повърхнина, докато  $L'$  и  $L''$  са частите от затворения контур, които са “паралелни” на повърхнината. Циркуляцията на интензитета по затворен контур е равна на нула, така че

$$\int_{L' \cup \ell_1 \cup L'' \cup \ell_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{L'} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{\ell_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{L''} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{\ell_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (270)$$

Нека да “сплескаме” контура върху заредената повърхнина, т.е. разглеждаме границата  $\ell_1 \rightarrow 0$ ,  $\ell_2 \rightarrow 0$ ,  $L' \rightarrow L$ ,  $L'' \rightarrow \bar{L} \equiv -L$  (с  $L$  означаваме получената при граничния преход ориентирана крива върху заредената повърхнина). Тогава

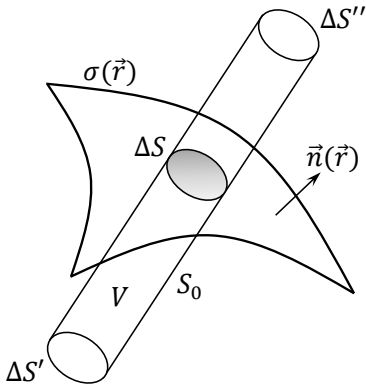
$$\lim_{\ell_{1,2} \rightarrow 0} \int_{\ell_{1,2}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int_L \vec{E}_{\text{под}} \cdot d\vec{r} - \int_L \vec{E}_{\text{над}} \cdot d\vec{r} = \int_L (\vec{E}_{\text{под}} - \vec{E}_{\text{над}}) \cdot d\vec{r} = 0. \quad (271)$$

Тъй като избраният контур е произволен, оттук следва, че

$$\int_L (E_{\text{под}}^{\parallel} - E_{\text{над}}^{\parallel}) d\ell = 0 \forall L \Rightarrow E_{\text{под}}^{\parallel}(\vec{r}) = E_{\text{над}}^{\parallel}(\vec{r}), \quad (272)$$

т.е. тангенциалните (спрямо повърхнината) компоненти на интензитета са едни и същи от двете страни. С други думи, от консервативността на електростатичното поле получиме, че върху заредени повърхности тангенциалните компоненти на електричния интензитет са *непрекъснати* функции на радиус-вектора.

Нека сега да разгледаме потока на интензитета през цилиндъра, показан на фигурата вляво. С  $\Delta S'$  и  $\Delta S''$  сме означили ориентираните площи на двете основи на цилиндъра, а с  $S_0$  – околната повърхнина на цилиндъра. Като се използва законът на Гаус, се вижда, че



$$q_V = \int_{\Delta S'' \cup S_0 \cup \Delta S'} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\Delta S''} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_0} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\Delta S'} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV + \int_{\Delta S} \sigma dS, \quad (273)$$

където  $\Delta S$  е ориентираната площ от заредената повърхнина, заградена от цилиндъра. Нека да разгледаме следните граници (“сплескваме” цилиндъра върху заредената повърхнина):  $\Delta S'' \rightarrow \Delta S$ ,  $\Delta S' \rightarrow -\Delta S$ ,  $S_0 \rightarrow 0$ ,  $V \rightarrow 0$ . Тогава

$$\lim_{S_0 \rightarrow 0} \int_{S_0} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \lim_{V \rightarrow 0} \int_V \rho dV = 0 \Rightarrow \int_{\Delta S} \varepsilon_0 (\vec{E}_{\text{над}} - \vec{E}_{\text{под}}) \cdot d\vec{S} = \int_{\Delta S} \sigma dS \forall \Delta S. \quad (274)$$

Оттук следва, че

$$\int_{\Delta S} \varepsilon_0 (E_{\text{над}}^{\perp} - E_{\text{под}}^{\perp}) dS = \int_{\Delta S} \sigma dS \Rightarrow \varepsilon_0 [E_{\text{над}}^{\perp}(\vec{r}) - E_{\text{под}}^{\perp}(\vec{r})] = \sigma(\vec{r}), \quad (275)$$

т.е. върху заредени повърхности нормалната компонента на интензитета търпи скок, пропорционален на повърхнинната плътност на зарядите.

Окончателно, получихме следните гранични условия върху заредени повърхнини:

$$E_{\text{над}}^{\parallel} - E_{\text{под}}^{\parallel} = 0, \quad E_{\text{над}}^{\perp} - E_{\text{под}}^{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (276)$$

Във векторна форма условията придобиват вида:  $\epsilon_0[\vec{E}_{\text{над}}(\vec{r}) - \vec{E}_{\text{под}}(\vec{r})] = \sigma(\vec{r})\vec{n}(\vec{r})$ , където  $\vec{n}(\vec{r})$  е единичният нормален вектор към повърхнината.

Еквивалентно, може да работим с електричния потенциал, тъй като  $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$ . За потенциала имаме едно ЧДУ от втори ред (уравнение на Поасон):

$$\Delta U(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}, \quad (277)$$

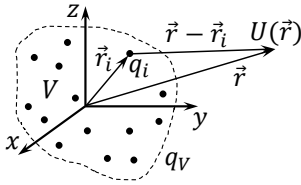
със следните гранични условия върху заредените повърхнини:

$$U_{\text{над}} - U_{\text{под}} = 0, \quad \frac{\partial U_{\text{над}}}{\partial n} - \frac{\partial U_{\text{под}}}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (278)$$

където частните производни са производни по направление на нормалния вектор към повърхнината.

### 3. Мултиполно разложение. Електричен диполен и квадруполен момент. Електростатично поле на системи от диполи: точкови и непрекъснато разпределени.

Нека да разгледаме система от точкови заряди  $q_i, i = 1, \dots, N$ , които имат радиус-вектори  $\vec{r}_i$  (вж. фигурата вляво). Искаме да получим израз за електричния потенциал



$$U(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (279)$$

на голямо разстояние от системата, т.е. при  $|\vec{r}| \gg |\vec{r}_i|$ . За тази цел прилагаме развитието в ред на Тейлър:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\vec{r}_i)_{a_1}(-\vec{r}_i)_{a_2} \dots (-\vec{r}_i)_{a_n}}{n!} \frac{\partial^n \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right)}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2} \dots \partial x_{a_n}} \Big|_{\vec{r}_i=0} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\vec{r}_i)_{a_1} (\vec{r}_i)_{a_2} \dots (\vec{r}_i)_{a_n}}{n!} \frac{\partial^n \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2} \dots \partial x_{a_n}} = \frac{1}{r} - \vec{r}_i \cdot \text{grad} \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \vec{r}_i \cdot \text{Grad} \left( \text{grad} \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{r}_i + \dots \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{3(\vec{r}_i \cdot \vec{r})^2 - \vec{r}_i^2 \vec{r}^2}{2r^5} + \dots = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{3}{2} \left( (\vec{r}_i)_a (\vec{r}_i)_b - \frac{\vec{r}_i^2 \delta_{ab}}{3} \right) \frac{x_a x_b}{r^5} + \dots, \end{aligned} \quad (280)$$

като сме използвали, че

$$\partial_a \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{x_a}{r^3}, \quad \partial_a \partial_b \left( \frac{1}{r} \right) = -\partial_a \left( \frac{x_b}{r^3} \right) = \frac{3x_a x_b}{r^5} - \frac{\delta_{ab}}{r^3}. \quad (281)$$

Като заместим това развитие в (279), ще получим т.нар. *мултиполно разложение* на по-

тенциала на системата от заряди:

$$U(\vec{r}) = \frac{q_V}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{\vec{r} \cdot \hat{Q} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^5} + \dots \quad (282)$$

Първият член представлява полето на точков заряд  $q_V = \sum_{i=1}^N q_i$  (пълният заряд на системата) в началото на координатната система (електричен монопол). Вторият член в разложението описва полето на електричен дипол, като векторът  $\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i$  се нарича *електричен диполен момент* на системата от заряди. Третият (квадруполен) член се характеризира с величината  $\hat{Q} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i (3\vec{r}_i \otimes \vec{r}_i - \vec{r}_i^2 \hat{\delta})$  (*електричният квадруполен момент* на системата), която има компоненти

$$Q_{ab} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i [3(\vec{r}_i)_a (\vec{r}_i)_b - \vec{r}_i^2 \delta_{ab}]. \quad (283)$$

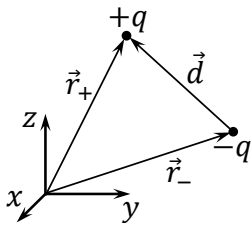
Лесно се вижда, че квадруполният момент е симетричен ( $Q_{ab} = Q_{ba}$ ) и с нулева следа ( $\text{Tr } \hat{Q} = Q_{aa} = 0$ ), т.е. има пет независими компоненти в общия случай.

Ако работим с непрекъснато разпределени заряди, например обемни заряди с плътност  $\rho(\vec{r}')$ , трябва да използваме съответно (249), за да изразим електричния потенциал при  $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ . В този случай развиваме в ред на Тейлър

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\vec{r}')_{a_1} (\vec{r}')_{a_2} \dots (\vec{r}')_{a_n}}{n!} \frac{\partial^n \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2} \dots \partial x_{a_n}} \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2 - \vec{r}'^2 \vec{r}^2}{2r^5} + \dots = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{3}{2} \left( (\vec{r}')_a (\vec{r}')_b - \frac{\vec{r}'^2 \delta_{ab}}{3} \right) \frac{x_a x_b}{r^5} + \dots \end{aligned} \quad (284)$$

Съответното мултиполно разложение на потенциала отново има вида (282), но момените се изразяват чрез обемни интеграли, а не чрез суми:

$$q_V = \int_V \rho(\vec{r}') dV', \quad p_a = \int_V \rho(\vec{r}') x'_a dV', \quad Q_{ab} = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}') (3x'_a x'_b - \vec{r}'^2 \delta_{ab}) dV'. \quad (285)$$



Независимо дали зарядите са точкови или непрекъснато разпределени, водещият член в мултиполното разложение е монополният (точков заряд в началото<sup>(33)</sup> на координатната система), но само ако общият заряд на системата е ненулев. В такъв случай диполният момент  $\vec{p}$  е пропорционален на радиус-вектора на центъра на зарядите  $\vec{r}_3 = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i / q_V$ . Ако  $q_V = 0$ , то водещият принос е диполен и тогава векторът на диполния момент е *свободен* и насочен от центъра на отрицателните заряди на системата към центъра на положителните заряди. В най-простия случай на два разноименни точкови заряда с еднаква големина  $q$ , които се намират на разстояние  $d$  един от друг, диполният момент е насочен от отрицателния заряд към положителния:  $\vec{p} = q\vec{r}_+ - q\vec{r}_- = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = q\vec{d}$  (вж. фигурата по-горе). Такава система от два разноименни заряда с еднаква големина се

<sup>(33)</sup>Забележете, че ако имаме точков заряд, който не е в началото на координатната система, полето не се описва само с монополния член, а се използва цялото мултиполно разложение.

нарича физичен дипол. На голямо разстояние от зарядите може да пренебрегнем следващите членове в мултиполното разложение и потенциалът е

$$U(\vec{r}) \approx \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r}) \approx \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5}, \quad (286)$$

т.е. електричното поле намалява обратно пропорционално на куба на разстоянието (за разлика от случая на точков заряд).

Ако разгледаме границите  $q \rightarrow +\infty$  и  $d \rightarrow 0$ , така че  $\vec{p} = q\vec{d} = \text{const}$ , получаваме т.нар. точков (идеален) дипол. За точковия дипол полето е чисто диполно, а не само приближително. В общия случай на  $N$  идеални дипола с моменти  $\vec{p}_i$  и радиус-вектори  $\vec{r}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , формулата за потенциала на полето е

$$U(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (287)$$

Подобно на зарядите, може да разгледаме непрекъснато разпределени идеални диполи с радиус-вектори  $\vec{r}'$ . Например, за обемно разпределени диполи

$$U(\vec{r}) = \int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}') dV'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (288)$$

където  $\vec{P}(\vec{r}') = \frac{d\vec{p}}{dV}$  е обемната плътност на диполите и интегрираме по тримерния обем  $V$ , в който са разпределени диполите.

#### 4. Електричен ток. Закон за запазване на заряда. Статично магнитно поле. Закон на Био-Савар.

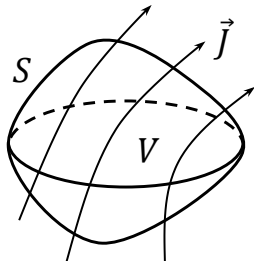
Статичното магнитно поле се поражда от стационарно движещи се заряди (постоянни токове), т.е. заряди, чиито скорости  $\vec{v}(\vec{r})$  не се изменят с времето. В магнитостатиката ролята на източник на полето ("заряд") се поема от токовия елемент  $\vec{v}(\vec{r}) dq(\vec{r})$ , т.е. магнитното поле не само се поражда от движещи се заряди, но и действа само на движещи се заряди. В зависимост от вида на зарядите токовият елемент приема различни форми:

$$\vec{v}(\vec{r}) dq(\vec{r}) = \begin{cases} \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}) dV = \vec{J}(\vec{r}) dV & \text{за обемни заряди;} \\ \sigma(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}) dS = \vec{K}(\vec{r}) dS & \text{за повърхнинни заряди;} \\ \lambda(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}) d\ell = \vec{I}(\vec{r}) d\ell & \text{за линеен тип заряди.} \end{cases} \quad (289)$$

Обърнете внимание, че движението на повърхнинни/линейни заряди се извършва *тангенциално* на заредената повърхност/крива.<sup>(34)</sup> Величината  $\vec{J} = \rho\vec{v}$  се нарича обемна плътност на тока,  $\vec{K} = \sigma\vec{v}$  е повърхнинната плътност на тока, а  $\vec{I} = \lambda\vec{v}$  се нарича линейна плътност на тока. Размерностите на токовите плътности са:  $[J] = \frac{\text{C}}{\text{m}^3} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{C}}{\text{s.m}^2} = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$  (обемната токова плътност има смисъл на ток през единица напречна площ),  $[K] = \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{C}}{\text{s.m}} = \frac{\text{A}}{\text{m}}$  (повърхнинната токова плътност има смисъл на ток през единица напречна

<sup>(34)</sup> Например, въртене на сфера около нейния център или въртене на окръжност около перпендикулярна ос, минаваща през центъра ѝ.

дължина върху заредената повърхност),  $[I] = \frac{C \cdot m}{m \cdot s} = \frac{C}{s} = A$  (линейната токова плътност има смисъл на ток по заредената крива). Може да се види, че линейната плътност на тока  $\vec{I} = I\vec{e}_t$ , където големината на постоянния ток  $I$  е величината, която се разглежда в училищния курс по физика, а  $\vec{e}_t$  е единичният тангенциален вектор към проводника, по който тече токът.



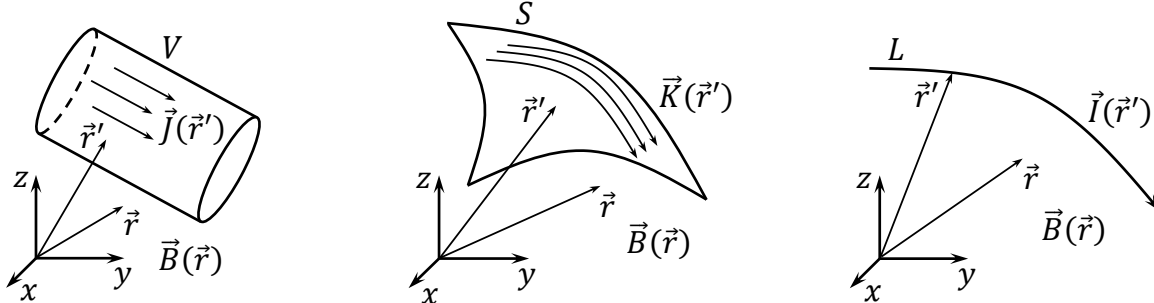
*Закон за запазване на заряда при постоянни токове:* Ако разгледаме обемно движещи се заряди с токова плътност  $\vec{J}(\vec{r})$ , то токът  $I_S$ , който протича през дадена повърхнина  $S$ , може да се изрази чрез следния повърхнинен интеграл от II род:

$$I_S = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}. \quad (290)$$

При стационарно движение на зарядите те не могат да се натрупват в някаква област от пространството и ако разгледаме произволна затворена повърхнина, общият ток  $I_S$  през нея трябва да бъде равен на нула (колкото заряд влиза през повърхнината, толкова трябва и да излезе от нея), т.е. като използваме теоремата на Гаус:

$$0 = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{J} dV, \quad (291)$$

откъдето  $\text{div} \vec{J}(\vec{r}) = 0$  за постоянни токове.<sup>(35)</sup> Последното условие означава, че постоянните токове текат по затворени криви.<sup>(36)</sup>



Магнитното поле във вакуум се описва чрез *магнитната индукция*  $\vec{B}$ , която за статично магнитно поле (породено от постоянен ток) може да се изрази чрез експериментално установения *закон на Био-Савар*, който представлява аналог на закона на Кулон. В частност, магнитната индукция на обемни токове с плътност  $\vec{J}$  е

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (292)$$

където  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/м}$  е магнитната проницаемост на вакуума. Интегрира се по обема  $V$ , в който текат токовете (вж. фигурата горе вляво). При повърхнинни токове с плътност

<sup>(35)</sup> Оттук следва, че строго погледнато движението на отделни заредени частици не е стационарно.

<sup>(36)</sup> В краен случай, токовете идват от безкрайност и отиват на безкрайност (вж. задачата по-долу за магнитното поле на ток по отсечка).

$\vec{K}$  за индукцията се получава:

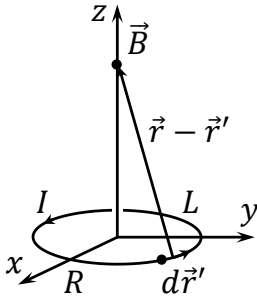
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (293)$$

като се интегрира по повърхнината  $S$ , по която текат токовете (вж. средната фигура по-горе). При линейни токове с плътност  $\vec{I}$  за индукцията се получава:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{\vec{I}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') d\ell'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (294)$$

като се интегрира по кривата  $L$ , по която тече токът (вж. фигурата горе вдясно). Като използваме, че  $d\vec{r}' = \vec{e}_t d\ell'$ , последното равенство се свежда до познатата форма на закона на Био-Савар:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (295)$$



*Магнитно поле на постоянен ток по окръжност:* Разглеждаме окръжност  $L$  с радиус  $R$  в равнината  $z = 0$  (вж. фигурата вляво), по която тече постоянен ток с големина  $I$ . Магнитното поле  $\vec{B}(z)$  по оста  $Oz$  се получава от закона на Био-Савар (295):

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (296)$$

където  $\vec{r} = (0, 0, z)$ , а  $\vec{r}' = (x', y', 0) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0)$ . Следователно  $\vec{r} - \vec{r}' = (-R \cos \varphi, -R \sin \varphi, z)$ , откъдето  $|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (R^2 + z^2)^{3/2}$ , а  $d\vec{r}' = R(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)d\varphi$ . Оттук

$$d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = R \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -R \cos \varphi & -R \sin \varphi & z \end{vmatrix} d\varphi = R(z \cos \varphi, z \sin \varphi, R)d\varphi. \quad (297)$$

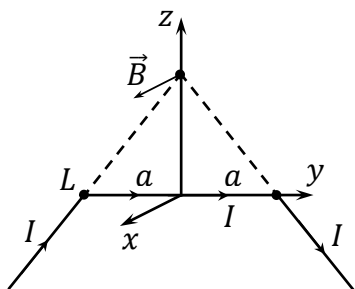
Като заместим получените изрази в (296),

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (z \cos \varphi, z \sin \varphi, R)d\varphi = \frac{\mu_0 I R^2 \vec{e}_z}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (298)$$

т.е. магнитното поле е насочено по посока на оста  $Oz$ , което е следствие от аксиалната симетрия на тока. Полето намалява с отдалечаване от окръжността. Максималната стойност на индукцията е в центъра на окръжността ( $z = 0$ ):  $B_{\max} = \frac{\mu_0 I}{2R}$ . Далеч от окръжността

$$\vec{B}(z \gg R) \approx \frac{\mu_0 I R^2 \vec{e}_z}{2|z|^3}, \quad (299)$$

т.е. магнитната индукция се изменя подобно на електростатичния интензитет на електричен дипол.



**Магнитно поле на постоянен ток по отсечка:** Разглеждаме постоянен ток с големина  $I$ , който тече по тънък проводник  $L$ , показан на фигурата вляво. Дължината на хоризонталната (по оста  $Oy$ ) отсечка от проводника е  $2a$ . Интересуваме се от стойността на магнитната индукция в точка с радиус-вектор  $\vec{r} = (0, 0, z)$  (по оста  $Oz$ , която представлява симетрала на отсечката), която лежи върху продълженията на останалите две (наклонени) части от проводника. Токът по наклонените части от проводника не създава магнитно поле в разглежданата точка (за тях  $(\vec{r} - \vec{r}') \parallel d\vec{r}'$ , откъдето  $d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = 0$ ), но е необходим, за да се удовлетвори условието (291) за стационарност на тока (токът идва от безкрайност и отива на безкрайност). Точките от хоризонталната отсечка имат радиус-вектори  $\vec{r}' = (0, y', 0)$ . Следователно  $\vec{r} - \vec{r}' = (0, -y', z)$ , откъдето  $|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (y'^2 + z^2)^{3/2}$ , а  $d\vec{r}' = (0, dy', 0)$ . Оттук

$$d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & dy' & 0 \\ 0 & -y' & z \end{vmatrix} = z\vec{e}_x dy', \quad (300)$$

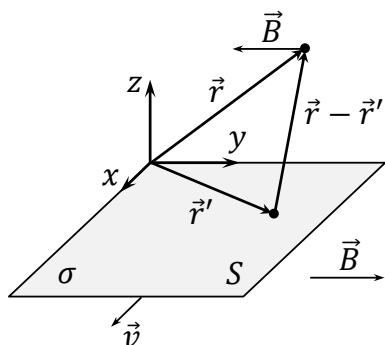
т.е. магнитното поле е насочено по посока на оста  $Ox$ . Като заместим получените изрази в закона на Био-Савар (295), ще получим

$$\begin{aligned} \vec{B}(z) &= \frac{\mu_0 I z \vec{e}_x}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{dy'}{(y'^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I z \vec{e}_x}{2\pi} \int_0^a \frac{dy'}{(y'^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I \vec{e}_x}{2\pi z} \int_0^{\frac{a}{z}} \frac{du}{(1 + u^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I \vec{e}_x}{2\pi z} \int_0^{\operatorname{arcsinh} \frac{a}{z}} \frac{dv}{\cosh^2 v} = \frac{\mu_0 I \vec{e}_x}{2\pi z} \tanh\left(\operatorname{arcsinh} \frac{a}{z}\right) = \frac{\mu_0 I a \vec{e}_x}{2\pi z \sqrt{a^2 + z^2}}, \end{aligned} \quad (301)$$

като сме направили субституцията  $y' = zu$ , а след това – субституцията  $u = \sinh v$ . В близост до отсечката имаме, че

$$\vec{B}(z \ll a) \approx \frac{\mu_0 I \vec{e}_x}{2\pi z}, \quad (302)$$

т.е. получава се частен случай на резултата (315) за полето на ток по права.



**Магнитно поле на движеща се заредена равнина:** Хомогенно заредената равнина  $z = 0$  с повърхнинна плътност на зарядите  $\sigma$  се движи равномерно по посока на оста  $Ox$  със скорост  $\vec{v}$ , както е показано на фигурата вляво. Като използваме закона на Био-Савар (293), нека да намерим магнитната индукция  $\vec{B}(\vec{r})$  в произволна точка с радиус-вектор  $\vec{r} = (x, y, z)$ . Точките от заредената равнина имат радиус-вектори  $\vec{r}' = (x', y', 0)$ . Следователно  $\vec{r} - \vec{r}' = (x - x', y - y', z)$ , откъдето  $|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{3/2}$ . Движението на равнината

поражда хомогенен повърхнинен ток с плътност  $\vec{K} = \sigma \vec{v} = \sigma v \vec{e}_x = (\sigma v, 0, 0)$ . Оттук

$$\vec{K} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \sigma v & 0 & 0 \\ x - x' & y - y' & z \end{vmatrix} = -\sigma v z \vec{e}_y + \sigma v (y - y') \vec{e}_z. \quad (303)$$

Като заместим получените изрази в закона на Био-Савар (293), ще получим

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0 \sigma v}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[-z \vec{e}_y + (y - y') \vec{e}_z] dx' dy'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (304)$$

Двойният интеграл може да се представи като сума от два интеграла – по  $\vec{e}_y$  и по  $\vec{e}_z$ . Може да се съобрази, че интегралът по  $\vec{e}_z$  е равен на нула, тъй като се свежда до интеграл от нечетна функция по симетричен относно нулата интервал. Следователно

$$\begin{aligned} \vec{B}(x, y, z) &= -\frac{\mu_0 \sigma v z \vec{e}_y}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx' dy'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{3/2}} \\ &= -\frac{\mu_0 \sigma v z \vec{e}_y}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi d\eta}{(\xi^2 + \eta^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 \sigma v z \vec{e}_y}{4\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\varphi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{\mu_0 \sigma v z \vec{e}_y}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 \sigma v z \vec{e}_y}{4} \int_{z^2}^{+\infty} \frac{dw}{w^{3/2}} = -\frac{\mu_0 \sigma v}{2} \frac{z}{|z|} \vec{e}_y, \quad (305) \end{aligned}$$

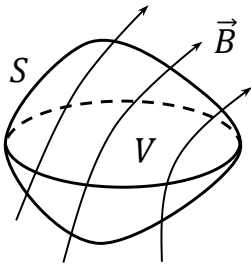
като сме направили субституциите  $x' - x = \xi$  и  $y' - y = \eta$ . След това сме преминали към полярни координати и сме заместили  $\rho^2 + z^2$  с  $w$ . Получава се хомогенно магнитно поле, подобно на електричното поле на хомогенно заредена равнина.

**5. Соленоидалност на магнитното поле. Закон на Ампер. Диференциални уравнения и гранични условия за статичното магнитно поле във вакуум. Магнитен векторен потенциал.**

Нека да анализираме дивергенцията на магнитното поле  $\vec{B}$ , като използваме закона на Био-Савар (292):<sup>(37)</sup>

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \operatorname{div} \left( \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \operatorname{div} \left( \vec{J}(\vec{r}') \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \operatorname{rot} \vec{J}(\vec{r}') \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \cdot \operatorname{rot} \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = 0, \quad (306) \end{aligned}$$

<sup>(37)</sup> Ще приложим следното твърдение за дивергенцията на векторно произведение от векторни полета  $\vec{F}(\vec{r})$  и  $\vec{G}(\vec{r})$ :  $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$ .



тъй като  $\text{rot } \vec{J}(\vec{r}') = 0$  (ротацията включва диференциране по компонентите на  $\vec{r}$ , а не на  $\vec{r}'$ ), а ротация от градиент винаги дава нула. Получихме, че  $\text{div } \vec{B} = 0$  (магнитното поле е соленоидално) и съответно потокът на магнитната индукция през произволна затворена повърхнина е равен на нула:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{B} dV = 0. \quad (307)$$

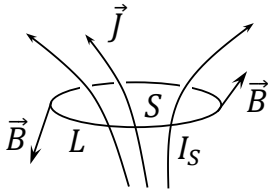
Еквивалентно твърдение е, че магнитното поле няма заряди за разлика от електричното (не са наблюдавани магнитни монополи). Следствие от този факт е, че силовите линии на полето са затворени криви.<sup>(38)</sup>

Като се използва, че постоянните токове са ограничени в пространството, от (292) може също така да се изведе най-важният закон в магнитостатиката, който се нарича *закон на Ампер (в диференциална форма)*:

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}), \quad (308)$$

т.е. обемната плътност на тока определя ротацията на магнитната индукция.

Ако разгледаме произволен затворен контур  $L$  и използваме теоремата на Стокс:



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_S, \quad (309)$$

т.е. циркулацията на магнитното поле по произволна затворена крива е пропорционална на алгебричната сума от токовете  $I_S$ , които прободат повърхнината  $S$ , заградена от кривата  $L$  (вж. фигурата вляво). Ако ориентацията на контура се задава от свитите пръсти на дясната ръка, то токовете през контура са с положителен знак, ако текат по посока на палеца на дясната ръка. Тази интегрална формулировка на закона на Ампер е полезна, когато се разглеждат симетрични токове. Тогава може да изберем затворения контур така, че магнитната индукция да е тангенциална и с постоянна големина върху кривата, при което пресмятането на интеграла е елементарно, или индукцията да е перпендикулярна на контура, което води до нулев принос към циркулацията.

За еднозначно решаване на диференциалните уравнения  $\text{div } \vec{B} = 0$  и  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$  е нужно да знаем какви гранични условия да наложим върху магнитното поле. Може да се покаже, като се използват интегралните форми на уравненията на магнитостатиката (307) и (309), че върху ориентирана повърхнина с единичен нормален вектор  $\vec{n}(\vec{r})$ , по която текат токове с плътност  $\vec{K}(\vec{r})$ , е изпълнено следното условие:<sup>(39)</sup>

$$\vec{B}_{\text{над}}(\vec{r}) - \vec{B}_{\text{под}}(\vec{r}) = \mu_0 [\vec{K}(\vec{r}) \times \vec{n}(\vec{r})], \quad (310)$$

т.е. нормалната компонента на полето е непрекъсната върху повърхността:  $B_{\text{над}}^\perp(\vec{r}) = B_{\text{под}}^\perp(\vec{r})$ . Тангенциалната компонента, успоредна на тока, е също непрекъсната, докато

<sup>(38)</sup>В краен случай, силовите линии идват от безкрайност и отиват на безкрайност, както в задачите по-долу за магнитното поле на равнинен ток и на безкраен соленоид.

<sup>(39)</sup>Както преди, означаваме полето непосредствено "над" повърхнината с  $\vec{B}_{\text{над}}(\vec{r})$ , а полето непосредствено "под" повърхнината – с  $\vec{B}_{\text{под}}(\vec{r})$ .

тангенциалната компонента на полето, която е перпендикулярна на тока, търпи скок, пропорционален на повърхнинната плътност на тока.

*Магнитен векторен потенциал:* Тъй като дивергенцията на магнитното поле е равна на нула, полето може да се представи като  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ . Величината  $\vec{A}(\vec{r})$  се нарича *магнитен векторен потенциал*. Ако добавим градиент от произволно скаларно поле към векторния потенциал, ще получим същата магнитна индукция:  $\text{rot}(\vec{A} + \nabla f) = \text{rot } \vec{A} = \vec{B}$ , т.е. магнитният векторен потенциал е определен с точност до скаларно поле (т.нар. калибровъчна свобода). Това ни позволява да наложим условие върху потенциала, което се нарича калибровъчно условие, с което да го определим еднозначно. В зависимост от контекста са удобни различни калибровъчни условия. В магнитостатиката най-удобна е т.нар. Кулонова (напречна) калибровка:  $\text{div } \vec{A} = 0$ . В такъв случай имаме следното уравнение за потенциала:

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A} = \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \quad (311)$$

т.е. магнитният векторен потенциал удовлетворява уравнение на Поасон подобно на електричния потенциал:

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r}). \quad (312)$$

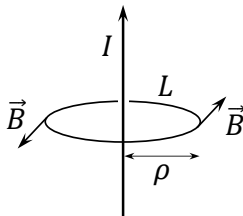
Решението на горното уравнение в цялото пространство (с нулеви гранични условия на безкрайност, т.е. при ограничени токове) е

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (313)$$

Нека да проверим, че така полученият резултат е съгласуван със закона на Био-Савар (292):

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \text{rot} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \times \text{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{B}, \end{aligned} \quad (314)$$

като отново сме използвали, че  $\text{rot } \vec{J}(\vec{r}') = 0$ .



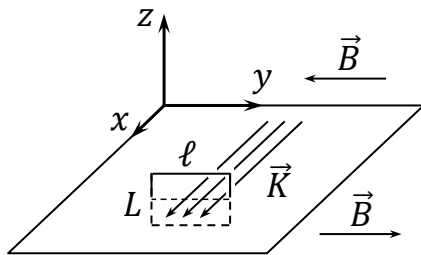
*Магнитно поле на ток по права:* Разглеждаме безкраен прав тънък проводник, по който тече постоянен ток с големина  $I$ . Нека проводникът е по протежение на координатната ос  $Oz$ . Подобно на случая на заредена права, токът има аксиална симетрия и трансляционна симетрия по протежение на проводника. Това означава, че магнитният векторен потенциал зависи само от разстоянието  $\rho$  до проводника:  $\vec{A} = \vec{A}(\rho)$ . Магнитната индукция  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ , откъдето следва, че магнитното поле няма радиална (на  $z$ -оста)

компонента. От друга страна, от закона на Био-Савар следва, че индукцията е перпендикулярна на тока, т.е.  $B_z = 0$ . Окончателно, като следствие от симетриите, големината на полето  $\vec{B}$  може да зависи само от разстоянието до проводника, а посоката му се определя от свитите пръсти на дясната ръка, ако токът тече по посока на палеца:  $\vec{B} = B(\rho)\vec{e}_\varphi$ , къде-

то  $\vec{e}_\varphi$  е единичен вектор по посока на свитите пръсти на дясната ръка. Като използваме закона на Ампер (309), да видим на колко е равна циркуляцията на магнитното поле по окръжност с център върху проводника и произволен радиус  $\rho$  (вж. фигурата по-горе):

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} B(\rho)\rho d\varphi = 2\pi\rho B(\rho) = \mu_0 I \Rightarrow B(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}, \quad (315)$$

т.е. големината на полето намалява обратно пропорционално на разстоянието до проводника.

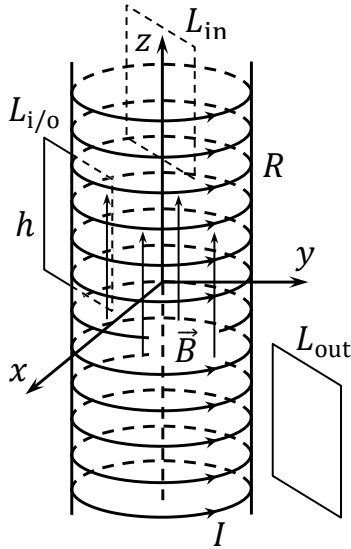


*Магнитно поле на равнинен ток:* Нека по равнината  $z = 0$  тече постоянен ток с повърхнинна плътност  $\vec{K} = K\vec{e}_x = \text{const}$ ,  $K > 0$ , както е показано на фигурата вляво. Подобно на случая на заредена равнина, токът има транслационни симетрии по осите  $Ox$  и  $Oy$ . Това означава, че магнитният векторен потенциал зависи само от координатата  $z$ :  $\vec{A} = \vec{A}(z)$ . Магнитната индукция  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ , откъдето следва, че магнитното поле няма  $z$ -компонента. От закона на Био-Савар пък след-

ва, че индукцията е перпендикулярна на тока, т.е.  $B_x = 0$ . Окончателно, магнитното поле е  $\vec{B} = B_y(z)\vec{e}_y$ , като  $B_y(-z) = -B_y(z)$ . Като използваме закона на Ампер (309), да видим на колко е равна циркуляцията на магнитната индукция по правоъгълна рамка  $L$  с височина  $2z$  ( $z > 0$ ) и широчина  $\ell$ , която пресича симетрично равнината и е перпендикулярна на тока (вж. фигурата по-горе):

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = B_y(z)\ell - B_y(-z)\ell = 2B_y(z)\ell = \mu_0 I_S = -\mu_0 K\ell \Rightarrow B_y(z) = -\frac{\mu_0 K}{2}, \quad (316)$$

т.е. полето е като на движеща се заредена равнина (305), имайки предвид, че там  $K = \sigma v$ . Вижда се също така, че  $\vec{B}(z > 0) - \vec{B}(z < 0) = \mu_0(\vec{K} \times \vec{e}_z)$ , което е частен случай на общата зависимост (310) за скока на тангенциалната компонента на магнитната индукция, която е перпендикулярна на тока.



**Магнитно поле на безкраен соленоид:** Безкрайният соленоид представлява гъсто намотан (с  $N \gg 1$  навивки) тънък проводник, образуващ плътна винтова линия с форма на цилиндър, чийто радиус  $R$  е много по-малък от неговата дължина  $\ell$ . За удобство се въвежда т.нар. плътност на навивките  $n = \Delta N / \Delta \ell = \text{const}$  (брой навивки на единица дължина). По проводника тече постоянен ток с големина  $I$ . Както може да се види на фигурата вляво, избрали сме координатната ос  $Oz$  да е по оста на соленоида. Подобно на случая на ток по права, безкрайно дългият соленоид притежава аксиална симетрия и трансляционна симетрия по протежение на  $z$ -оста. Следователно, магнитният векторен потенциал зависи само от разстоянието  $\rho$  до оста на соленоида:  $\vec{A} = \vec{A}(\rho)$ . Магнитната индукция  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ , откъдето следва, че магнитното поле няма радиална (на  $z$ -оста) компонента.

От друга страна, от закона на Био-Савар следва, че индукцията е перпендикулярна на токовете, т.е. полето  $\vec{B}$  е по протежение на оста  $Oz$ :  $\vec{B} = B_z(\rho)\vec{e}_z$ . За да определим еднозначно магнитната индукция, ще разгледаме нейната циркулация по различни видове затворени контури.

Първо, като използваме закона на Ампер (309), да намерим циркулацията на магнитното поле по външна за соленоида правоъгълна рамка  $L_{\text{out}}$  (с височина  $h$ ), която е успоредна на оста на соленоида (вж. фигурата по-горе):

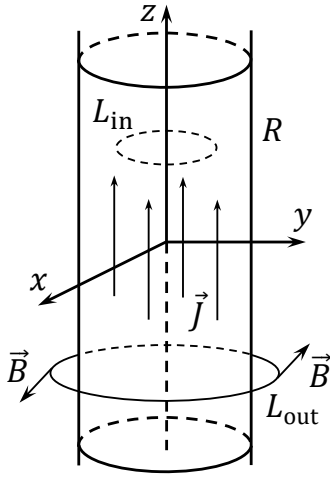
$$\oint_{L_{\text{out}}} \vec{B} \cdot d\vec{r} = B_z(\rho_1)h - B_z(\rho_2)h = \mu_0 I_S = 0 \Rightarrow B_z(\rho_1) = B_z(\rho_2), \quad (317)$$

където  $\rho_1$  и  $\rho_2$  са по-големи от  $R$ . Тъй като рамката има произволна широчина и е на произволно разстояние от соленоида, полето извън соленоида е хомогенно:  $B_z(\rho > R) = \text{const}$ . Всъщност, може да се покаже, че извън безкрайния соленоид няма поле, тъй като магнитните силови линии са затворени.

Ако разгледаме циркулацията по подобна правоъгълна рамка  $L_{\text{in}}$ , която е изцяло вътре в соленоида, ще получим отново хомогенно магнитно поле:  $B_z(\rho < R) = \text{const}$ . За да намерим полето  $\vec{B} = B_z\vec{e}_z$  вътре в соленоида, трябва да определим циркулацията на индукцията по правоъгълна рамка  $L_{i/o}$  (отново с височина  $h$ ), която обхваща  $N_h$  навивки от соленоида (вж. отново фигурата по-горе):

$$\oint_{L_{i/o}} \vec{B} \cdot d\vec{r} = B_z h = \mu_0 I_S = \mu_0 I N_h \Rightarrow B_z = \mu_0 I \frac{N_h}{h} = \mu_0 n I. \quad (318)$$

Гъсто намотаният тънък проводник формира повърхнинен ток  $\vec{K}$  по посока на свитите пръсти на дясната ръка, ако палецът сочи по посока на  $z$ -оста. Лесно може да се съобрази, че големината на плътността на тока е  $K = nI$ . Отново може да се убедим, че се изпълнява съотношението (310), като в настоящия случай "над" означава вън от соленоида, а "под" – вътре в него (нормалният вектор към цилиндъра-соленоид сочи радиално навън).



*Магнитно поле на ток по цилиндър:* Нека да разгледаме плътен безкрайно дълъг цилиндър с радиус  $R$ , по който тече хомогенен ток с обемна плътност  $\vec{J}$ . Пълният ток по цилиндъра има големина  $I = \pi J R^2$ . Нека да въведем цилиндрични координати и да ориентираме оста на цилиндъра по протежение на  $z$ -оста на координатната система. Вследствие от наличните симетрии, които са същите като в задачата за магнитното поле на ток по права, индукцията трябва да зависи само от радиалната координата  $\rho$  и да има само една ненулева компонента (по посока на свитите пръсти на дясната ръка, ако палецът е по посока на оста  $Oz$ ):  $\vec{B} = B(\rho)\vec{e}_\varphi$ .

Видът на полето извън цилиндъра може да се получи, ако разгледаме циркулацията на индукцията по окръжност  $L_{out}$  с радиус  $\rho \geq R$ , лежаща в равнина, перпендикулярна на  $z$ -оста, и с център по оста  $Oz$ . Тогава от закона на Ампер следва, че

$$\oint_{L_{out}} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} B(\rho)\rho d\varphi = 2\pi\rho B(\rho) = \mu_0 I \Rightarrow B_{out}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}. \quad (319)$$

Този резултат съвпада с полето (315), което създава ток  $I$  по безкраен прав тънък проводник, на разстояние  $\rho$  от проводника.

Магнитната индукция вътре в цилиндъра ще получим, като пресметнем циркулацията по подобна на горната окръжност, но с радиус  $\rho < R$ :

$$\oint_{L_{in}} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} B(\rho)\rho d\varphi = 2\pi\rho B(\rho) = \mu_0 I_S = \pi\mu_0 J\rho^2 \Rightarrow B_{in}(\rho) = \frac{\mu_0 J\rho}{2} = \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi R^2}, \quad (320)$$

т.е. индукцията се изменя линейно, подобно на електричния интензитет в равномерно заредено кълбо.

## 6. Мултиполно разложение на магнитния векторен потенциал. Магнитен момент на стационарни токове.

Нека да разгледаме линеен постоянен ток  $\vec{I}(\vec{r}')$ , който е ограничен в околност на началото на координатната система. По-рано видяхме, че ограничените постояннотокови линии са затворени. Искаме да получим израз за съответния магнитен векторен потенциал  $\vec{A}(\vec{r})$  на голямо разстояние от тока, т.е. при  $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ . За линеен ток по затворена крива се изпълнява, че

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{\vec{I}(\vec{r}') d\ell'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{I d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (321)$$

Може да използваме познатото развитие в ред на Тейлър (284), като запазим само първите два члена за простота:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\vec{r}')_{a_1} (\vec{r}')_{a_2} \dots (\vec{r}')_{a_n}}{n!} \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2} \dots \partial x_{a_n}} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3}. \quad (322)$$

Като заместим по-горе, се получава

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint_L d\vec{r}' + \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint_L (\vec{r}' \cdot \vec{r}) d\vec{r}'. \quad (323)$$

Преместването по затворен контур е винаги нулево, така че първият интеграл е равен на нула, което е свързано с отсъствието на магнитни монополи. Може да използваме, че

$$\oint_L d[(\vec{r}' \cdot \vec{r})\vec{r}'] = \oint_L (\vec{r}' \cdot \vec{r}) d\vec{r}' + \oint_L \vec{r}' (\vec{r} \cdot d\vec{r}') = 0 \Rightarrow \oint_L (\vec{r}' \cdot \vec{r}) d\vec{r}' = - \oint_L \vec{r}' (\vec{r} \cdot d\vec{r}'). \quad (324)$$

Това позволява да представим приближения векторен потенциал като

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \oint_L [(\vec{r}' \cdot \vec{r}) d\vec{r}' - \vec{r}' (\vec{r} \cdot d\vec{r}')] = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \oint_L (\vec{r}' \times d\vec{r}') \times \vec{r} = \frac{\mu_0 I \vec{S}' \times \vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times \vec{r}}{4\pi r^3}. \quad (325)$$

С  $\vec{S}'$  сме означили векторната площ, заградена от токовия контур,<sup>(40)</sup> а  $\vec{m} = I\vec{S}'$  е свободният вектор на магнитния диполен момент на токовия контур. Нека да получим магнитната индукция на магнитен дипол:

$$\vec{B}(\vec{r}) \approx \text{rot} \left( \frac{\mu_0 \vec{m} \times \vec{r}}{4\pi r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5}. \quad (326)$$

Това е по принцип полето далеч от ограничени токови контури. Вижда се, че полето на точковия магнитен дипол е подобно на полето на електричния дипол. Ако разгледаме  $N$  точкови магнитни диполи  $\vec{m}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , с радиус-вектори  $\vec{r}_i$ , техният векторен потенциал ще бъде

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_0 \vec{m}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (327)$$

Ако имаме непрекъснато разпределени диполи с радиус-вектори  $\vec{r}'$  и обемна плътност  $\vec{M}(\vec{r}') = \frac{d\vec{m}}{dV}$ , съответният векторен потенциал е

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V \frac{\mu_0 \vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') dV'}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (328)$$

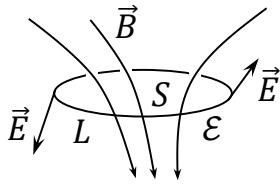
като интегрираме по тримерния обем  $V$ , в който са разпределени диполите.

**7. Закон на Фарадей за електромагнитната индукция. Уравнения на Максвел. Извод на вълновото уравнение за електромагнитно поле.**

Нека вече да разглеждаме променливи електромагнитни полета, т.е.  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$  и  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ . Все още е валидно, че

$$\text{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}, \quad \text{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (329)$$

<sup>(40)</sup>Използвами сме израза за площната скорост (8), откъдето следва, че  $d\vec{S}' = \vec{r}' \times d\vec{r}'/2$ .



но останалите два закона за електричното и магнитно полета трябва да се модифицират. Циркулацията на електричното поле може да е ненулева в общия случай. Законът на Фарадей в интегрална форма гласи, че при промяна на потока на магнитното поле през дадена повърхнина се индуцира електрично напрежение по контура, ограждащ повърхнината (вж. фигурата вляво):

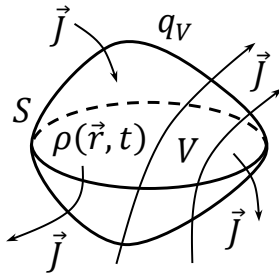
$$\varepsilon = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \quad (330)$$

т.е. в диференциална форма:

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (331)$$

Знакът “-” отговаря на факта, че магнитното поле, породено от индуцирания ток, се стреми да противодейства на промяната на “външното” магнитно поле (правило на Ленц).

Електричният заряд се запазва, т.е. ако разгледаме някаква затворена повърхнина  $S$ , изменението на заряда  $q_V$  в нея еднозначно се определя от токовете  $\vec{J}$ , които влизат или излизат от нея:



$$\frac{dq_V}{dt} = -\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}. \quad (332)$$

Знакът “-” е следствие от факта, че  $d\vec{S}$  е насочен навън от повърхнината. Като се приложи теоремата на Гаус за дясната страна на горното уравнение, се получава диференциалната форма на закона за запазване на заряда:

$$\frac{dq_V}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} dV = -\int_V \text{div } \vec{J}(\vec{r}, t) dV \Rightarrow \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{J}(\vec{r}, t) = 0. \quad (333)$$

Последното уравнение се нарича също така уравнение за непрекъснатост. Нека сега да разгледаме следния израз:

$$0 = \text{div rot } \vec{B} = \mu_0 \text{div } \vec{J} = -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0, \quad (334)$$

т.е. в случая на променливи полета трябва да модифицираме и закона на Ампер:

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t) + \vec{C}(\vec{r}, t). \quad (335)$$

Векторното поле  $\vec{C}(\vec{r}, t)$  може да се определи от:

$$0 = \text{div rot } \vec{B} = \mu_0 \text{div } \vec{J} + \text{div } \vec{C} = -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{C} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial (\text{div } \vec{E})}{\partial t} + \text{div } \vec{C} = \text{div} \left( \vec{C} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \quad (336)$$

като сме използвали закона на Гаус. Естественият и правилен избор в случая е да се вземе просто

$$\vec{C}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (337)$$

при което законът на Ампер придобива вида:

$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (338)$$

В интегрална форма имаме, че

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_S \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_S + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (339)$$

Лесно се вижда, че комбинацията  $\varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  има размерност на обемна токова плътност, и е възприето да се нарича ток на отгестване.

В крайна сметка получихме следните частни диференциални уравнения на Максвел, които трябва да удовлетворява електромагнитното поле:

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (340)$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (341)$$

При отсъствие на заряди и токове се получават вакуумните уравнения на Максвел:

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (342)$$

Граничните условия в общия случай са същите като в електростатиката и магнитостатиката. Аналогично на механиката, основната задача в електродинамиката е да се намерят полетата  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  при дадени източници (заряди и токове), като трябва да се удовлетворят и граничните условия. За еднозначно намиране на решенията за полетата са нужни и начални условия  $\vec{E}(\vec{r}, t_0) = \vec{E}_0(\vec{r})$  и  $\vec{B}(\vec{r}, t_0) = \vec{B}_0(\vec{r})$ , които трябва да са съгласувани с (да удовлетворяват) уравненията на Максвел и граничните условия.

Сега ще покажем, че уравненията на Максвел имат вълнови решения. Нека да разгледаме следния израз по два различни начина:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = \operatorname{grad} \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \Delta \vec{E}. \quad (343)$$

От друга страна имаме, че

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (344)$$

От двата израза получаваме, че

$$\operatorname{grad} \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \operatorname{grad} \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}. \quad (345)$$

По аналогичен начин разглеждаме магнитното поле:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{B} - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B}. \quad (346)$$

Изпълнява се също така, че

$$\text{rot rot } \vec{B} = \text{rot} \left( \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \text{rot } \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial (\text{rot } \vec{E})}{\partial t} = \mu_0 \text{rot } \vec{J} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (347)$$

От двата израза следва, че

$$-\Delta \vec{B} = \mu_0 \text{rot } \vec{J} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \text{rot } \vec{J}. \quad (348)$$

Както се вижда, електричното и магнитното полета удовлетворяват нехомогенни хиперболични (вълнови) уравнения. Във вакуум ( $\rho = 0$ ,  $\vec{J} = 0$ ) уравненията стават хомогенни:

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (349)$$

Това означава, че съществуват решения във вид на разпространяващи се вълни със скорост  $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ , която е точно равна на скоростта на светлината във вакуум. Трябва да имаме предвид, обаче, че електромагнитните вълни не изчерпват всички вакуумни решения на уравненията на Максвел.

## 8. Плоски монохроматични електромагнитни вълни във вакуум.

Нека да решим вълновите уравнения (349) за електромагнитното поле във вакуум. Уравненията са еднотипни, така че ще се концентрираме върху уравнението за  $\vec{E}$ . Уравнението е линейно, което позволява да търсим решения с разделени променливи, т.е. за всяка компонента на полето приемаме, че  $E_i(\vec{r}, t) = f_i(\vec{r}) g_i(t)$  (без сумиране по повтарящите се индекси). Като заместим в съответното уравнение от (349), се получава:

$$g_i(t) \Delta f_i(\vec{r}) - \frac{1}{c^2} f_i(\vec{r}) \ddot{g}_i(t) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta f_i}{f_i} = \frac{\ddot{g}_i(t)}{c^2 g_i} = \text{const} = -\frac{\omega^2}{c^2}, \quad (350)$$

където  $\omega = 2\pi\nu$  е кръговата честота. Ние търсим решения във вид на монохроматични вълни (вълни с фиксирана честота), при което константата на разделяне приема една единствена стойност, пропорционална на квадрата на честотата. Получаваме две уравнения за функциите  $f_i$  и  $g_i$ :

$$\Delta f_i + \frac{\omega^2}{c^2} f_i = 0, \quad \ddot{g}_i + \omega^2 g_i = 0 \Rightarrow g_i(t) = C_i e^{i\omega t} + D_i e^{-i\omega t}.^{(41)} \quad (351)$$

Достатъчно е да вземем само една от експонентите за нашето решение:

$$E_i(\vec{r}, t) = f_i(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad \Delta f_i + k^2 f_i = 0, \quad (352)$$

където сме въвели вълновото число  $k = \omega/c$ .<sup>(42)</sup> Ние ще се интересуваме само от плоски монохроматични вълни, т.е. вълни, които имат определена посока на разпространение. Може така да изберем координатната система, че тази посока да съвпада със  $z$ -оста. Във

<sup>(41)</sup>Електромагнитните вълни са *реални* полета (функции на координатите и времето), но по-удобно е да се работи с имагинерни експоненти. Подразбираме, че действителната форма на дадено поле се получава, като вземем реалната му част.

<sup>(42)</sup>Вълновото число е обратно пропорционално на дължината на вълната:  $k = 2\pi/\lambda$ .

вакуум, за всяка една компонента на полето се получава:

$$E_i(z, t) = f_i(z) e^{-i\omega t}, \quad f_i'' + k^2 f_i = 0 \Rightarrow f_i(z) = E_{0i} e^{ikz} + F_i e^{-ikz}. \quad (353)$$

Двете експоненти съответстват на вълни, разпространяващи се в положителната и отрицателната посока на оста  $Oz$ . Ние ще приемем, че вълната се разпространява в положителната посока, при което

$$E_i(z, t) = E_{0i} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (354)$$

За произволна посока на разпространение на вълната, определена от единичния вектор  $\vec{n}$ , имаме, че

$$E_i(\vec{r}, t) = E_{0i} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (355)$$

където  $\vec{k} = \omega \vec{n} / c = k \vec{n}$  се нарича вълнов вектор. Вълновият вектор е перпендикулярен на вълновите фронтове (повърхнини на еднаква фаза  $\varphi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$ ), които в случая представляват равнини. Електромагнитните вълни се характеризират с два вида скорости. Фазовата скорост е скоростта, с която се движат вълновите фронтове:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \text{const} \Rightarrow \vec{r}(t) = \frac{\omega t}{k} \vec{n} + \vec{C} \Rightarrow v_\phi = \frac{\omega}{k} = c, \quad (356)$$

т.е. фазовата скорост във вакуум е равна на скоростта на светлината. Приложение намира и т.нар. групова скорост, с която се движат суперпозиции от вълни (вълнови пакети). Груповата скорост е скоростта, с която се пренася информация:

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega(k)}{dk} = c = v_\phi, \quad (357)$$

т.е. в неограничен вакуум двете скорости съвпадат, но в ограничена среда (напр. вълновод) са различни по принцип.

Окончателно, за електричното и магнитното полета се получава:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (358)$$

Нека да заместим тези изрази в уравненията (349):

$$\left(-\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = 0, \quad \left(-\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = 0. \quad (359)$$

Отново получихме т.нар. дисперсионно съотношение  $\omega(k) = c|\vec{k}| = ck$ , което характеризира плоските монохроматични електромагнитни вълни във вакуум.

Като заместим (358) във вакуумните уравнения на Максвел за дивергенциите на полетата, ще получим:

$$\text{div } \vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \text{grad}[e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}] = i\vec{k} \cdot \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad (360)$$

$$\text{div } \vec{B} = \vec{B}_0 \cdot \text{grad}[e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}] = i\vec{k} \cdot \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0, \quad (361)$$

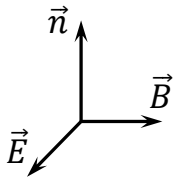
т.е. електромагнитното поле е перпендикулярно на посоката на разпространение на вълната (такива вълни се наричат *напречни*). Замествайки (358) в останалите две уравнения

на Максвел, имаме:

$$\text{rot } \vec{E} = -\vec{E}_0 \times \text{grad}[e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}] = -i\vec{E}_0 \times \vec{k} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (362)$$

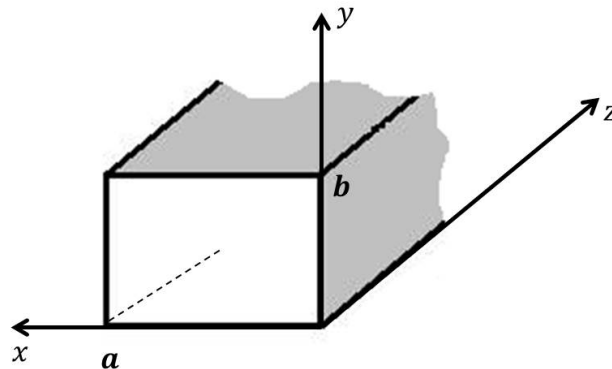
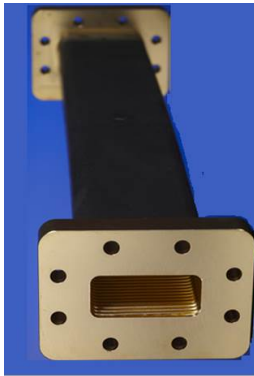
т.е.  $\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0$  или  $\vec{n} \times \vec{E}_0 = c\vec{B}_0$ . Аналогично:

$$\text{rot } \vec{B} = -\vec{B}_0 \times \text{grad}[e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}] = -i\vec{B}_0 \times \vec{k} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (363)$$



откъдето  $c\vec{B}_0 \times \vec{n} = \vec{E}_0$ , което практически съвпада с  $\vec{n} \times \vec{E}_0 = c\vec{B}_0$ . Получихме, че векторите  $\vec{n}, \vec{E}, \vec{B}$  са взаимно перпендикулярни и образуват дясна тройка, като електричното и магнитното полета се определят взаимно. Ако знаем  $\vec{E}$ , може да намерим  $\vec{B}$ , и обратно. Това означава, че неограничената плоска монохроматична електромагнитна вълна във вакуум се определя от максимум две линейно независими компоненти, които представляват възможните (линейни) поляризации на вълната.

## 9. Електромагнитни вълни, разпространяващи се в правоъгълен вълновод.



Нека да разгледаме също така интересната задача за разпространение на вълни във вълновод. Най-общо казано, вълновод е всеки продълговат обект, по протежението на който могат да се разпространяват електромагнитни вълни. Най-често под вълновод се има предвид тръба, изградена от проводящ материал (вж. фигурата по-горе). Ние ще се ограничим с изучаването на най-простия случай на вълновод с правоъгълно напречно сечение и идеално проводящи стени (това на практика е достатъчно добро приближение). Ще търсим решения, които представляват суперпозиция на плоски монохроматични вълни от вида:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)}, \quad \vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (364)$$

като вълноводът е по протежение на оста  $Oz$ , както е показано на фигурата по-горе. Нека да заместим полетата (364) във вакуумните уравнения на Максвел (342). От  $\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$  получаваме, че

$$\text{rot } \vec{E} = \text{rot } \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} - \vec{E}_0 \times \text{grad}[e^{i(kz - \omega t)}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B}_0 e^{i(kz - \omega t)}. \quad (365)$$

По компоненти имаме, че

$$\frac{\partial E_{0z}}{\partial y} - ikE_{0y} = i\omega B_{0x}, \quad ikE_{0x} - \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} = i\omega B_{0y}, \quad \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} = i\omega B_{0z}. \quad (366)$$

По аналогичен начин от  $c^2 \text{rot } \vec{B} = \partial \vec{E} / \partial t$  получаваме, че

$$c^2 \text{rot } \vec{B} = c^2 \text{rot } \vec{B}_0 e^{i(kz - \omega t)} - c^2 \vec{B}_0 \times \text{grad}[e^{i(kz - \omega t)}] = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}. \quad (367)$$

По компоненти:

$$\frac{\partial B_{0z}}{\partial y} - ikB_{0y} = -\frac{i\omega}{c^2} E_{0x}, \quad ikB_{0x} - \frac{\partial B_{0z}}{\partial x} = -\frac{i\omega}{c^2} E_{0y}, \quad \frac{\partial B_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} = -\frac{i\omega}{c^2} E_{0z}. \quad (368)$$

От уравненията (366) и (368) може да изразим всички компоненти на векторите  $\vec{E}_0$  и  $\vec{B}_0$  чрез  $E_{0z}$  и  $B_{0z}$ :

$$E_{0x} = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left( k \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} + \omega \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} \right), \quad E_{0y} = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left( k \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} - \omega \frac{\partial B_{0z}}{\partial x} \right), \quad (369)$$

$$B_{0x} = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left( k \frac{\partial B_{0z}}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} \right), \quad B_{0y} = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left( k \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} \right). \quad (370)$$

Като заместим компонентите на полетата в останалите две уравнения на Максвел  $\text{div } \vec{E} = 0$  и  $\text{div } \vec{B} = 0$ , ще получим следните уравнения за  $z$ -компонентите (уравнения на Хелмхолц):

$$\frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial y^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_{0z} = 0, \quad \frac{\partial^2 B_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_{0z}}{\partial y^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) B_{0z} = 0. \quad (371)$$

За да решим уравненията на Хелмхолц, трябва да наложим гранични условия. Граничните условия следват от факта, че стените на вълновода са идеално проводящи, т.е. може да приемем, че в тях няма електрични и магнитни полета. Като знаем, че тангенциалните компоненти на електричното поле и нормалната компонента на магнитното поле са непрекъснати върху стените, следва, че  $E^\parallel = 0$  и  $B^\perp = 0$  върху стените. По принцип във вълноводите могат да се реализират три типа вълни: напречно-електрични (ТЕ), при които  $E_{0z} = 0$ ,  $B_{0z} \neq 0$ ; напречно-магнитни (ТМ) с  $E_{0z} \neq 0$ ,  $B_{0z} = 0$ ; напречно-електрично-магнитни (ТЕМ), при които  $E_{0z} = 0$ ,  $B_{0z} = 0$  и съответно  $k = \omega/c$  (такива вълни се наблюдават само в коаксиален тип вълноводи).

*Напречно-електрични вълни в правоъгълен вълновод:* Нека първо да разгледаме задачата за разпространение на напречно-електрични (ТЕ) вълни във вълновод с напречно сечение правоъгълник с дължина  $a$  и широчина  $b < a$ , т.е. областта на разпространение на вълните е от вида  $x \in [0, a]$ ,  $y \in [0, b]$ ,  $z \in (-\infty, +\infty)$ . В случая  $E_{0z} = 0$  и трябва да решим само второто уравнение на Хелмхолц (371). Уравнението е линейно, така че разделяме променливите ( $B_{0z}(x, y) = X(x)Y(y)$ ) и заместваме:

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) XY = 0 \implies \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (372)$$

Събираемите отляво са функции само на  $x$  или  $y$ , а отдясно стои константа, така че и събираемите отляво трябва да бъдат константи:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2, \quad (373)$$

като се изпълнява следното дисперсионно съотношение:

$$k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2. \quad (374)$$

Избрали сме знаците по този начин, тъй като търсим осцилиращи решения:

$$X(x) = C_1 \cos k_x x + D_1 \sin k_x x, \quad Y(y) = C_2 \cos k_y y + D_2 \sin k_y y. \quad (375)$$

От граничното условие  $B^\perp = 0$  следва, че  $B_{0x}(0, y) = 0 = B_{0x}(a, y)$ . Едно от изведените по-горе уравнения (370) се свежда в случая до:

$$B_{0x} = \frac{ik}{(\omega/c)^2 - k^2} \frac{\partial B_{0z}}{\partial x}, \quad (376)$$

което дава гранични условия на Нойман за търсената функция  $B_{0z}(x, y)$ :

$$\frac{\partial B_{0z}(0, y)}{\partial x} = 0 \Rightarrow X'(0) = 0 \Rightarrow D_1 = 0; \quad (377)$$

$$\frac{\partial B_{0z}(a, y)}{\partial x} = 0 \Rightarrow X'(a) = 0 \Rightarrow k_x = \frac{\pi m}{a}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (378)$$

За останалите две стени имаме гранични условия  $B_{0y}(x, 0) = 0 = B_{0y}(x, b)$ . От (370) следва, че

$$B_{0y} = \frac{ik}{(\omega/c)^2 - k^2} \frac{\partial B_{0z}}{\partial y}, \quad (379)$$

което също води до гранични условия на Нойман:

$$\frac{\partial B_{0z}(x, 0)}{\partial y} = 0 \Rightarrow Y'(0) = 0 \Rightarrow D_2 = 0; \quad (380)$$

$$\frac{\partial B_{0z}(x, b)}{\partial y} = 0 \Rightarrow Y'(b) = 0 \Rightarrow k_y = \frac{\pi n}{b}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (381)$$

Окончателно се получава, че

$$B_{0z}(x, y) = \sum_{\substack{m, n=0 \\ (m, n) \neq (0, 0)}}^{+\infty} B_{mn} \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right), \quad (382)$$

където константите  $B_{mn}$  се определят от начални условия (какви вълни сме пуснали по вълновода). Дисперсионното съотношение (374) придобива вида:

$$\frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2. \quad (383)$$

Забележете, че не може  $m = n = 0$ , защото тогава  $k = \omega/c$  и вълната е ТЕМ, т.е. не съществува в такъв вълновод. От горното уравнение се получава, че

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 m^2}{a^2} - \frac{\pi^2 n^2}{b^2}}. \quad (384)$$

За да имаме незатихващо решение (бягаща вълна), трябва  $k$  да е реално число, т.е.

$$\frac{\omega^2}{c^2} \geq \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \Rightarrow \omega \geq \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} = \omega_{mn}. \quad (385)$$

Казано по друг начин, за всяка отделна вълна има минимална честота  $\omega_{mn}$  (при  $k = 0$ ), с която вълната може да се разпространява по вълновода. Тъй като  $a > b$ , минималната допустима честота  $\omega_{10} = \pi c/a$  има вълната с  $m = 1$  и  $n = 0$ . Във вълновода не могат да се разпространяват ТЕ-вълни с честота по-малка от  $\omega_{10}$ .

Нека да намерим фазовата и груповата скорост на вълните:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{mn}^2}{\omega^2}}} > c, \quad v_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{kc^2}{\omega} = \frac{c^2}{v_\phi} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{mn}^2}{\omega^2}} < c. \quad (386)$$

Не представлява проблем обстоятелството, че фазовата скорост е по-голяма от скоростта на светлината във вакуум, тъй като преносът на информация се осъществява чрез вълнови пакети, чиято скорост е равна на груповата скорост, която е винаги по-малка от скоростта на светлината във вакуум.

*Напречно-магнитни вълни в правоъгълен вълновод:* Нека сега да решим задачата за разпространение на напречно-магнитни (ТМ) вълни в същия вълновод с напречно сечение правоъгълник с дължина  $a$  и широчина  $b < a$ , т.е. областта на разпространение на вълните отново е от вида  $x \in [0, a]$ ,  $y \in [0, b]$ ,  $z \in (-\infty, +\infty)$ . В случая  $B_{0z} = 0$  и трябва да решим само първото уравнение на Хелмхолц (371). Уравнението е линейно, така че разделяме променливите ( $E_{0z}(x, y) = X(x)Y(y)$ ) и заместяваме:

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) XY = 0 \Rightarrow \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (387)$$

Събираемите отляво са функции само на  $x$  или  $y$ , а отдясно стои константа, така че и събираемите отляво трябва да бъдат константи:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2, \quad (388)$$

като се изпълнява следното дисперсионно съотношение:

$$k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2. \quad (389)$$

Избрали сме знаците по този начин, тъй като търсим осцилиращи решения:

$$X(x) = C_1 \cos k_x x + D_1 \sin k_x x, \quad Y(y) = C_2 \cos k_y y + D_2 \sin k_y y. \quad (390)$$

От граничното условие  $E^{\parallel} = 0$  следва, че  $E_{0z}(0, y) = 0 = E_{0z}(a, y)$  (гранични условия на Дирихле), откъдето:

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0; \quad X(a) = 0 \Rightarrow k_x = \frac{\pi m}{a}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (391)$$

За останалите две стени имаме същите гранични условия ( $E_{0z}(x, 0) = 0 = E_{0z}(x, b)$ ), което води до:

$$Y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0; \quad Y(b) = 0 \Rightarrow k_y = \frac{\pi n}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (392)$$

Окончателно се получава, че

$$E_{0z}(x, y) = \sum_{m,n=1}^{+\infty} E_{mn} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right), \quad (393)$$

където константите  $E_{mn}$  отново се определят от начални условия. Забележете, че не може  $m = 0$  или  $n = 0$ , защото тогава  $E_{0z} = 0$  и вълната е ТЕМ, т.е. не съществува в такъв вълновод. Дисперсионното съотношение (389) има същия вид, както преди:

$$\frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2. \quad (394)$$

Оттук се получава, че

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 m^2}{a^2} - \frac{\pi^2 n^2}{b^2}}. \quad (395)$$

За да имаме незатихващо решение (бягаща вълна), трябва  $k$  да е реално число, т.е.

$$\frac{\omega^2}{c^2} \geq \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \Rightarrow \omega \geq \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} = \omega_{mn}. \quad (396)$$

Отново за всяка отделна вълна има минимална честота  $\omega_{mn}$  (при  $k = 0$ ), с която вълната може да се разпространява по вълновода. В случая минималната допустима честота е  $\omega_{11}$ , т.е. във вълновода не могат да се разпространяват ТМ-вълни с честота по-малка от  $\omega_{11}$ .

Фазовите и груповите скорости на ТМ-вълните са същите като на ТЕ-вълните:

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{mn}^2}{\omega^2}}} > c, \quad v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{kc^2}{\omega} = \frac{c^2}{v_{\phi}} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{mn}^2}{\omega^2}} < c. \quad (397)$$

Отново не представлява проблем обстоятелството, че фазовата скорост е по-голяма от скоростта на светлината във вакуум, тъй като преносът на информация се осъществява чрез вълнови пакети, чиято скорост е равна на груповата скорост, която е винаги по-

малка от скоростта на светлината във вакуум.

## 10. Електромагнитно поле в материална среда. Поляризация и намагнитване. Закон на Ом.

Материалните среди са съставени от микроскопични обекти – атоми и молекули, чиято структура и ориентация се променя под действието на електричните и магнитните полета. Електричните полета поляризират средата, т.е. създават обемно разпределени електрични диполи, докато магнитните полета може да намагнитят средата, като индуцират магнитни диполи.

Например, ако средата е съставена от неподвижно свързани атоми (те са електроненутрални, така че осреднено няма свободни заряди:  $\rho = 0$ ), външното електрично поле оказва противоположно насочени сили на положителните ядра и електроните около ядрата. Това води до деформация на електронните облаци и появата на атомен диполен момент  $\vec{p}$ , който за не много силни полета е пропорционален на интензитета:  $\vec{p} = \alpha \vec{E}$ , където  $\alpha$  се нарича атомна поляризуемост. Ако концентрацията на атомите е  $n$  и средата е изотропна, външното поле ще индуцира обемни диполи с плътност  $\vec{P} = n\alpha \vec{E}$ , която се нарича *поляризация* на средата. В общия случай на изотропни линейни диелектрици поляризацията  $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$ , като  $\chi_e > 0$  се нарича електрична възприемчивост.<sup>(43)</sup> Обемно разпределените диполи създават поле, което се описва с (288):

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla' \cdot \left( \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \end{aligned} \quad (398)$$

като  $\nabla'$  включва производни по примованите координати, повърхнинният интеграл е по околната (затворена) повърхнина на материала и сме използвали теоремата на Гаус (с  $\vec{n}$  сме означили нормалните вектори към повърхнината). Вижда се, че поляризацията на материала води до повърхнинни заряди с плътност  $\sigma_{\text{св}} = \vec{P} \cdot \vec{n}$  и обемни заряди с плътност  $\rho_{\text{св}} = -\text{div } \vec{P}$ .<sup>(44)</sup> Тези заряди са свързани с атомите, т.е. не могат да се движат свободно в материалната среда. В частност, ако  $\vec{P} = \text{const}$ , то  $\rho_{\text{св}} = 0$  (заряди се индуцират само по повърхността). В общия случай, трябва да модифицираме закона на Гаус:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho + \rho_{\text{св}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho - \text{div } \vec{P}}{\epsilon_0} \Rightarrow \text{div } \vec{D} = \rho, \quad (399)$$

където  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  се нарича електрична индукция. За линейни среди, при които поляризацията е линейна на приложения интензитет,  $\vec{D} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}$ . С  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$  сме означили относителната диелектрична проницаемост, а  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  е диелектричната (абсолютна) проницаемост на материала.

В материалните среди има микроскопични магнитни диполи, които се дължат основно на движението на електроните около ядрата и на спина на електроните. Точното им

<sup>(43)</sup> За някои материали  $\vec{P} \neq 0$  дори в отсъствие на външно поле. Такива материали се наричат фероелектрици.

<sup>(44)</sup> Сравнително лесно може да се провери чрез теоремата на Гаус, че сумата от повърхнинните и обемните заряди е нула.

описание изисква използването на квантовата механика, но от макроскопична гледна точка може да считаме, че тези осреднени диполни моменти създават т.нар. *намагнитване*  $\vec{M}$  (магнитният аналог на поляризацията), което представлява осреднената обемна плътност на микроскопичните диполи. Ако няма приложено външно магнитно поле, намагнитването по принцип е нула, тъй като отделните магнитни диполчета са ориентирани хаотично и полетата им се компенсират. За не много силни външни магнитни полета намагнитването е пропорционално на магнитната индукция  $\vec{B}$  (линейни магнетици):

$$\vec{M} = \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \frac{\vec{B}}{\mu_0}, \quad (400)$$

като  $\chi_m$  е магнитната възприемчивост на материала.<sup>(45)</sup> Ако използваме формулата (328) за векторния потенциал на индуцираните магнитни диполи, ще получим, че

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \times \left( \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \end{aligned} \quad (401)$$

Приложили сме вариант на теоремата на Гаус:  $\int_V dV \nabla \times \vec{F} = \oint_S d\vec{S} \times \vec{F}$ , където  $S$  е затворената повърхнина, ограждаща обема  $V$ . От крайния израз за магнитния потенциал се вижда, че индуцираните магнитни диполи са еквивалентни на повърхнинни токове с плътност  $\vec{K}_{cb} = \vec{M} \times \vec{n}$  (с  $\vec{n}$  сме означили нормалните вектори към повърхнината) и обемни токове с плътност  $\vec{J}_{cb} = \text{rot } \vec{M}$ , които са свързани към градивните елементи на материала на микроскопично ниво. Лесно може да се съобрази, че  $\text{div } \vec{J}_{cb} = 0$ , т.е. това са постоянни токове. Тези допълнителни токове трябва да се отчетат в закона на Ампер:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_{cb}) = \mu_0 (\vec{J} + \text{rot } \vec{M}) \Rightarrow \text{rot } \vec{H} = \vec{J}, \quad (402)$$

където  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$  се нарича магнитен интензитет. Като използваме връзката (400) между  $\vec{M}$  и  $\vec{B}$ , следва, че  $\vec{B} = (1 + \chi_m)\mu_0 \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H} = \mu \vec{H}$  за линейни среди.  $\mu_r = 1 + \chi_m$  се нарича относителна магнитна проницаемост, а  $\mu = \mu_r \mu_0$  е магнитната (абсолютна) проницаемост на материалната среда.

Разглежданията досега бяха за статични полета. Ако полетата зависят от времето, то зарядите и токовете също ще са променливи. В частност, свързаните заряди  $\rho_{cb}(\vec{r}, t)$  ще се движат, пораждайки ток  $\vec{J}'_{cb}(\vec{r}, t)$ , за който се удовлетворява уравнението за непрекъснатост (333):

$$\text{div } \vec{J}'_{cb}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \rho_{cb}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial (\text{div } \vec{P}(\vec{r}, t))}{\partial t} = \text{div} \left( \frac{\partial \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right) \Rightarrow \vec{J}'_{cb}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (403)$$

Като добавим този допълнителен ток към закона на Ампер в нестационарния случай, се

<sup>(45)</sup>Материалите с  $-1 < \chi_m < 0$  са диамагнитни и при тях намагнитването е насочено обратно на приложеното магнитно поле. Веществата с  $\chi_m > 0$  са парамагнитни, като намагнитването им е по посока на външното магнитно поле. Отделно, има малък брой материали с  $\vec{M} \neq 0$  при  $\vec{B} = 0$ , които са феромагнитни – такива са постоянните магнити.

получава:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}'_{\text{CB}} + \vec{J}'_{\text{CB}}) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \left( \vec{J} + \operatorname{rot} \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (404)$$

Окончателно, макроскопичните уравнения на Максвел в материална среда придобиват вида:

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t), \quad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (405)$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (406)$$

Ако материалната среда е проводяща, то има свободно движещи се заряди (най-често електрони, но може да са електрони и положителни йони в случая на плазма). За простота нека да разгледаме ток в проводящо твърдо тяло, породен от движението на свободните електрони. Движещите се електрони се блъскат в градивните елементи на тялото, което може да се опише с ефективна сила на съпротивление. Най-простият модел на такова движение е моделът на Друде, при който силата на съпротивление се приема за Стоксова. Тогава се изпълнява следното ефективно уравнение на Нютон за дрейфовото движение на електроните:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau}, \quad (407)$$

където  $m$  е електронната маса,  $e$  е елементарният електричен заряд, а  $\tau$  е средното време между два акта на разсейване на даден електрон, което за добри проводници е от порядъка на  $10^{-14}$  s. Ако приложим променливо напрежение с кръгова честота  $\omega$  на краищата на проводника, вътре в него ще се създаде променливо електрично поле с интензитет  $\vec{E} = \vec{E}_0(\omega)e^{-i\omega t}$ . Търсим решение на горното уравнение във вида  $\vec{v} = \vec{v}_0(\omega)e^{-i\omega t}$ . Като заместим израза за скоростта в (407), ще получим, че

$$-i\omega m\vec{v} = -e\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau} \Rightarrow \vec{v} = -\frac{\tau e\vec{E}}{m(1 - i\omega\tau)}. \quad (408)$$

От друга страна, обемната плътност на тока, създаден от движещите се електрони, е  $\vec{J} = -ne\vec{v}$  ( $n$  е концентрацията на електроните), т.е. токът е пропорционален на приложния електричен интензитет:

$$\vec{J} = \frac{nte^2\vec{E}}{m(1 - i\omega\tau)} = \sigma(\omega)\vec{E}, \quad \sigma(\omega) = \frac{nte^2}{m(1 - i\omega\tau)}. \quad (409)$$

Това съотношение изразява закона на Ом в диференциална форма. Комплексната величина  $\sigma(\omega)$  се нарича (специфична) електропроводимост, като реалната ѝ част е отговорна за активното съпротивление на проводника, а имагинерната част – за реактивното съпротивление. При постоянно напрежение ( $\omega = 0$ ) и постоянни токове проводимостта е  $\sigma_{\text{DC}} = nte^2/m$ . Специфичното съпротивление  $\rho = 1/\sigma_{\text{DC}}$ . При големи честоти ( $\omega\tau \gg 1$ ) проводимостта е почти чисто имагинерна:  $\sigma(\omega) \approx \frac{i\sigma_{\text{DC}}}{\omega\tau}$ , т.е. получаваме поведението на бобина. Интересно е, че въпреки опростеното класическо разглеждане, моделът на Друде дава правилния резултат за проводимостта при не много големи честоти.

11. Телеграфно уравнение. Електромагнитни вълни в неограничена проводяща среда.

Като се използва уравнението за непрекъснатост (333), законът на Ом в диференциална форма (409) и законът на Гаус  $\text{div } \vec{E} = \rho/\varepsilon$  за хомогенни и изотропни линейни материални среди, може да се покаже, че за обемни заряди във вътрешността на такава проводяща среда се изпълнява:

$$\partial_t \rho + \text{div } \vec{J} = \partial_t \rho + \sigma \text{div } \vec{E} = \partial_t \rho + \sigma \rho/\varepsilon = 0. \quad (410)$$

Полученото ЧДУ от I ред за  $\rho(\vec{r}, t)$  има общо решение  $\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) e^{-\sigma t/\varepsilon}$ , т.е. ако в началния момент в проводника има заряди с обемна плътност  $\rho_0(\vec{r})$ , то те се разпределят експоненциално бързо по повърхността на проводника (обемната плътност клони към нула). Това означава, че вътре в проводящите среди няма заряди в стационарния случай и може да използваме следните уравнения на Максвел, като предполагаме, че материалната среда е линейна, хомогенна и изотропна:

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{B} = \mu\sigma\vec{E} + \varepsilon\mu\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (411)$$

Оттук

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\text{rot} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial(\text{rot } \vec{B})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu\sigma\vec{E} + \varepsilon\mu\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (412)$$

От друга страна имаме, че  $\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$ . От двата израза получаваме, че

$$-\Delta \vec{E} = -\mu\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta \vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0. \quad (413)$$

По аналогичен начин се получава същото уравнение за магнитното поле:  $\Delta \vec{B} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ . Тези две уравнения за електричното и магнитното поле се наричат *телеграфни уравнения*. Те са хиперболични (вълнови) уравнения, които описват електромагнитните вълни в проводяща среда.

Нека да потърсим решения на телеграфните уравнения във вид на плоски монохроматични вълни, които се разпространяват по  $z$ -оста в даден проводник:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad \vec{B}(z, t) = \vec{B}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad (414)$$

като  $\text{Re}(k) > 0$ , за да имаме разпространение в положителната посока. Като заместим тези полета в телеграфните уравнения, ще получим следното комплексно уравнение за вида на вълновото число  $k(\omega)$ :  $k^2 = \varepsilon\mu\omega^2 + i\mu\sigma\omega$ . Полагаме  $k = \text{Re}(k) + i\text{Im}(k)$  и след решаване на биквадратно уравнение за реалната част на вълновото число, следва, че

$$\text{Re}(k) = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \right)^2} + 1 \right)^{1/2}}, \quad \text{Im}(k) = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \right)^2} - 1 \right)^{1/2}}, \quad (415)$$

като за простота разглеждаме полета с малки честоти, така че проводимостта  $\sigma \approx \sigma_{\text{DC}}$  е

реална. Наличието на имагинерна част на вълновото число води до затихване:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\text{Im}(k)z} e^{i(\text{Re}(k)z - \omega t)}, \quad \vec{B}(z, t) = \vec{B}_0 e^{-\text{Im}(k)z} e^{i(\text{Re}(k)z - \omega t)}, \quad (416)$$

като величината  $d = \frac{1}{\text{Im}(k)}$  се нарича дебелина на скин-слоя и тя определя дълбочината на проникване на електромагнитните вълни в проводника. Лесно се вижда, че при  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $\text{Im}(k) \rightarrow 0$  и  $d \rightarrow +\infty$  (няма затихване в диелектрици), докато  $\text{Re}(k) \rightarrow \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = n\omega/c$ , което е очаквано ( $n$  е показателят на пречупване). В границата  $\sigma \rightarrow +\infty$ ,  $\text{Im}(k) \rightarrow +\infty$  и  $d \rightarrow 0$  (електромагнитните полета не навлизат в идеални проводници, което е свързано с ефекта на екраниране).

За да определим как точно изглеждат електромагнитните вълни в проводяща среда, нека да използваме уравненията на Максвел (411):

$$\text{div } \vec{E} = \partial_z E_z = ikE_z = 0 \Rightarrow E_{0z} = 0; \quad \text{div } \vec{B} = \partial_z B_z = ikB_z = 0 \Rightarrow B_{0z} = 0. \quad (417)$$

С други думи, електромагнитната вълна е винаги напречна като във вакуум. Освен това,

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -(\partial_z E_y) \vec{e}_x + (\partial_z E_x) \vec{e}_y = (-ikE_{0y} \vec{e}_x + ikE_{0x} \vec{e}_y) e^{i(kz - \omega t)} = -\partial_t \vec{B} \\ &= (i\omega B_{0x} \vec{e}_x + i\omega B_{0y} \vec{e}_y) e^{i(kz - \omega t)} \Rightarrow kE_{0x} = \omega B_{0y}, \quad kE_{0y} = -\omega B_{0x}, \end{aligned} \quad (418)$$

т.е. електричното поле се определя от магнитното и обратно. Може да запишем последните две равенства във векторна форма:  $\omega \vec{B}_0 = k \vec{e}_z \times \vec{E}_0$ , т.е. векторите  $\vec{e}_z, \vec{E}_0, \vec{B}_0$  образуват дясна тройка подобно на вакуумния случай. Уравнението за ротацията на магнитната индукция не налага допълнителни ограничения върху полетата, така че отново има две независими поляризации на вълните. Нека  $\vec{E}_0 = (E_0, 0, 0)$  (има поляризация по оста  $Ox$ ). Оттук  $\vec{B}_0 = (0, B_0, 0) = (0, \frac{kE_0}{\omega}, 0)$ . Тъй като  $k$  е комплексно число,  $E_0$  и  $B_0$  също са комплексни в общия случай. В експоненциална форма  $E_0 = |E_0| e^{i\delta_E}$ , а  $B_0 = |B_0| e^{i\delta_B}$ . Ако  $k = |k| e^{i\varphi}$ , то

$$B_0 = \frac{kE_0}{\omega} = \frac{|k||E_0|}{\omega} e^{i(\varphi + \delta_E)} = |B_0| e^{i\delta_B}. \quad (419)$$

Следователно

$$\frac{|B_0|}{|E_0|} = \frac{|k|}{\omega} = \sqrt{\varepsilon\mu} \left( 1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \right)^2 \right)^{1/4} = \frac{n}{c} \left( 1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \right)^2 \right)^{1/4}, \quad (420)$$

т.е. магнитното поле е по-силно в сравнение с вакуумния случай. За фазите на полетата се изпълнява, че  $\delta_B = \varphi + \delta_E$ , което означава, че магнитното поле е *отместено по фаза* спрямо електричното. Реалните полета имат вида:

$$\vec{E} = |E_0| e^{-\text{Im}(k)z} \cos(\text{Re}(k)z - \omega t + \delta_E) \vec{e}_x, \quad \vec{B} = |B_0| e^{-\text{Im}(k)z} \cos(\text{Re}(k)z - \omega t + \delta_E + \varphi) \vec{e}_y. \quad (421)$$

## 12. Разпространение на светлина в диелектрик. Нелинейни ефекти.

В диелектрици проводимостта е нулева и по принцип няма свободни токове ( $\vec{J} = 0$ ). Също така ще считаме, че няма свободни заряди, т.е.  $\rho = 0$ . Уравненията за полетата в

такива среди са

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, t) = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (422)$$

Ако средата е линейна и изотропна, връзката между интензитетите и индукциите е  $\vec{D} = \varepsilon(\vec{r})\vec{E}$  и  $\vec{B} = \mu(\vec{r})\vec{H}$ . Ако диелектриктът е хомогенен, проницаемостите са константи и може да се изнесат пред диференциалните оператори, което води до следните уравнения:

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (423)$$

т.е. уравненията са като вакуумните уравнения на Максвел (342), в които сме заменили  $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon$  и  $\mu_0 \rightarrow \mu$ . Полетата удовлетворяват вълнови уравнения

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \vec{B} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \implies \Delta \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \vec{B} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0, \quad (424)$$

където  $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} > 1$  е показателят на пречупване на средата.

В неограничен диелектрик електромагнитните вълни са като във вакуум. В частност, плоските монохроматични вълни имат вида:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (425)$$

като в настоящия случай  $\omega(k) = ck/n$ , т.е. фазовата и груповата скорост на вълните е *номалка* от скоростта на светлината във вакуум:  $v_\phi = v_{\text{гр}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} < c$ . Електромагнитните вълни са отново напречни и имат две поляризации.

*Нелинейни ефекти:* Ако поляризацията или намагнитването не са линейни функции от интензитетите, материалната среда е нелинейна, което води до нелинейни макроскопични уравнения за полетата и интересни нелинейни ефекти. Типичен пример за такъв ефект е зависимостта на показателя на пречупване от електричния интензитет на електромагнитната вълна, при което материалната среда започва да се държи като леща и може да се наблюдава т.нар. самофокусировка на светлинния сноп. Подобни ефекти се наблюдават, ако работим с мощни (лазерни) полета с големи стойности на електричния интензитет. Ситуацията е подобна на деформациите на твърдите тела – при малки приложени сили имаме линейни деформации, докато при големи сили се стига до нелинейни деформации. Магнитните възприемчивости на диелектриците са много малки по принцип и затова ще приемем, че  $\mu \approx \mu_0$  и  $\vec{B} \approx \mu_0 \vec{H}$ . Електричните възприемчивости се влияят по-лесно от електромагнитните полета и затова ще работим с нелинейна поляризация  $\vec{P}$ . Ще разгледаме най-простия случай на хомогенна и изотропна среда с квадратична нелинейност:

$$\vec{P} = \vec{P}^L + \vec{P}^{\text{NL}} = \varepsilon_0 \chi_e^{(1)} \vec{E} + \vec{P}^{\text{NL}}, \quad (426)$$

т.е.  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \vec{P}^{\text{NL}}$ , където  $\varepsilon = (1 + \chi_e^{(1)})\varepsilon_0$ . Уравненията (422) придобиват вида:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}^{\text{NL}}}{\partial t}, \quad (427)$$

като сме използвали, че електромагнитните вълни са напречни. Разглеждаме

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} = -\text{rot} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial(\text{rot } \vec{B})}{\partial t} = -\varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}^{\text{NL}}}{\partial t^2}, \quad (428)$$

т.е. получаваме следното нелинейно вълново уравнение за електричното поле:

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}^{\text{NL}}}{\partial t^2}. \quad (429)$$

Нека да използваме полученото вълново уравнение, за да анализираме следния нелинеен ефект. Нека две вълни с една и съща поляризация, които имат честоти  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , се разпространяват по посока на оста  $Oz$ . В нелинейна среда от двете вълни се поражда нова вълна със същата поляризация и честота  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  (наблюдава се процес на сумиране на две честоти). За да получим уравненията за амплитудите на трите вълни, използваме горното вълново уравнение и принципа за суперпозиция, като сумарният интензитет на вълните е  $E = E^{(1)} + E^{(2)} + E^{(3)}$ , където

$$E^{(i)}(z, t) = A_i(z) e^{i(k_i z - \omega_i t)} + A_i^*(z) e^{-i(k_i z - \omega_i t)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (430)$$

Нелинейният принос към поляризацията на хомогенна и изотропна среда в най-простия случай е  $\varepsilon_0 \chi_e^{(2)} E^2$ , т.е. изпълнява се, че

$$\Delta E - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\chi_e^{(2)}}{c^2} \frac{\partial^2 E^2}{\partial t^2}, \quad (431)$$

като сме използвали, че  $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1 + \chi_e^{(1)}}$ . Имагинерните експоненти са линейно независими функции, т.е. може да разгледаме поотделно решенията за отделните честоти. Например, за членовете с честота  $\omega_3$  се получава следното уравнение:

$$\left( \frac{d^2 A_3}{dz^2} + 2ik_3 \frac{dA_3}{dz} - k_3^2 A_3 + \frac{n^2 \omega_3^2}{c^2} A_3 \right) e^{i(k_3 z - \omega_3 t)} = -\frac{2\chi_e^{(2)} \omega_3^2}{c^2} A_1 A_2 e^{i(k_1 z + k_2 z - \omega_3 t)}, \quad (432)$$

като сме използвали, че  $\omega_3$  може да се изрази чрез  $\omega_1$  и  $\omega_2$  само като  $\omega_1 + \omega_2$ . За да опростим нашите разглеждания, ще приемем, че  $|A_i''| \ll |k_i A_i'|$  (без сумиране). Това неравенство изразява т.нар. приближение на бавно изменящата се амплитуда. Така получаваме следното *нелинейно* ОДУ от I ред за амплитудите:

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{i\chi_e^{(2)} \omega_3^2}{k_3 c^2} A_1 A_2 e^{i(k_1 + k_2 - k_3)z}, \quad (433)$$

като сме приели, че  $k_3 = \frac{n\omega_3}{c}$ . По аналогичен начин, като разгледаме приносите с честоти  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , получаваме:

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{i\chi_e^{(2)} \omega_1^2}{k_1 c^2} A_2^* A_3 e^{-i(k_1 + k_2 - k_3)z}, \quad \frac{dA_2}{dz} = \frac{i\chi_e^{(2)} \omega_2^2}{k_2 c^2} A_1^* A_3 e^{-i(k_1 + k_2 - k_3)z}. \quad (434)$$

Получените уравнения за изменението на амплитудите са нелинейни и сравнително

трудни за решаване. Затова нека да разгледаме по-проста ситуация – генерирането на втора хармонична, т.е. как от вълна с честота  $\omega$  се получава вълна с честота  $2\omega$ . В този случай  $E = E^{(1)} + E^{(2)}$ , като  $\omega_1 = \omega$ , а  $\omega_2 = 2\omega$ . Ще означим вълновите числа с  $k_\omega \equiv k_1$  и  $k_{2\omega} \equiv k_2$ . Амплитудите са съответно  $A_\omega \equiv A_1$  и  $A_{2\omega} \equiv A_2$ . В този случай имаме две независими уравнения за амплитудите:

$$\frac{dA_\omega}{dz} = \frac{i\chi_e^{(2)}\omega^2}{k_\omega c^2} A_\omega^* A_{2\omega} e^{i\Delta kz}, \quad \frac{dA_{2\omega}}{dz} = \frac{2i\chi_e^{(2)}\omega^2}{k_{2\omega} c^2} A_\omega^2 e^{-i\Delta kz}, \quad (435)$$

като  $\Delta k = k_2 - 2k_1 = k_{2\omega} - 2k_\omega$ . Процесът е най-ефикасен, когато  $\Delta k = 0$ , т.е.  $k_{2\omega} = 2k_\omega$ . Тогава

$$\frac{dA_\omega}{dz} = \frac{i\chi_e^{(2)}\omega^2}{k_\omega c^2} A_\omega^* A_{2\omega}, \quad \frac{dA_{2\omega}}{dz} = \frac{i\chi_e^{(2)}\omega^2}{k_\omega c^2} A_\omega^2. \quad (436)$$

Нека да въведем безразмерни променливи  $u_\omega = A_\omega/|A_\omega(0)|$  и  $u_{2\omega} = A_{2\omega}/|A_\omega(0)|$ . Уравненията за новите променливи са

$$u'_\omega = i\kappa u_\omega^* u_{2\omega}, \quad u'_{2\omega} = i\kappa u_\omega^2, \quad \kappa = \frac{\chi_e^{(2)}\omega^2}{k_\omega c^2} |A_\omega(0)|. \quad (437)$$

Като диференцираме второто уравнение по  $z$ , може да получим уравнение само за  $u_{2\omega}$ :

$$u''_{2\omega} = 2i\kappa u_\omega u'_\omega = -2\kappa^2 |u_\omega|^2 u_{2\omega} = -2\kappa^2 (1 - |u_{2\omega}|^2) u_{2\omega}, \quad (438)$$

като сме използвали, че  $|u_\omega|^2 + |u_{2\omega}|^2 = 1$ .<sup>(46)</sup> От (438) може да се види, че фазата на  $u_{2\omega}$  не се изменя и може да я приемем за нулева, т.е.  $u_{2\omega}$  е реална функция. Получаваме, че  $u''_{2\omega} = -2\kappa^2 (1 - u_{2\omega}^2) u_{2\omega}$ , което има решение  $u_{2\omega}(z) = \tanh \kappa z$ . Оттук може да се получат интензивностите на вълните с честоти  $\omega$  и  $2\omega$ :

$$I_\omega(z) = \frac{I_\omega(0)}{\cosh^2 \kappa z}, \quad I_{2\omega}(z) = I_\omega(0) \tanh^2 \kappa z, \quad (439)$$

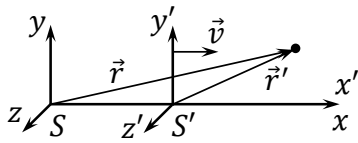
където  $I_\omega(0)$  е началната интензивност на падащата вълна с честота  $\omega$ . Вижда се, че интензивността  $I_\omega$  намалява при навлизане в диелектрика, докато  $I_{2\omega}$  нараства, т.е. генерира се вълна с удвоена честота (втора хармонична).

### 13. Принципи на специалната теория на относителността. Лоренцови трансформации. Интервал: основни свойства.

Когато изследваме обекти с много малки размери или с много големи скорости, Нютоновата механика престава да бъде валидна и се налага да бъде заменена с по-обща теория. При движения със скорости, сравними със скоростта на светлината във вакуум, трябва да се използва т.нар. специална теория на относителността (СТО). СТО е изградена на базата на два експериментално проверени постулата, формулирани от Айнщайн. Първият постулат практически съвпада с принципа на относителността на Галилей: физическите закони имат един и същ вид във всички инерциални отправни системи. Вторият постулат гласи, че скоростта на светлината във вакуум  $c = 299792458$  m/s е еднаква

<sup>(46)</sup>Това съотношение следва от запазването на енергията, тъй като сумарната интензивност на вълните трябва да е равна на началната (когато няма втора хармонична), т.е.  $|A_\omega|^2 + |A_{2\omega}|^2 = |A_\omega(0)|^2$ .

във всички инерциални отправни системи, което на пръв поглед изглежда безсмислено.<sup>(47)</sup> За да се удовлетвори вторият постулат на Айнщайн, трябва да отхвърлим идеята на Нютон, че времето е абсолютно. Както ще видим, времето в различните инерциални отправни системи “тече” по различен начин.



Нека да разгледаме две инерциални отправни системи с еднаква ориентация:  $S$  и  $S'$ , която се отдалечава от  $S$  със скорост  $v$ , като осите на двете отправни системи са подбрани така, че относителната им скорост да е по посока на  $x$ -координатите. Засега няма да се интересуваме от движението в перпендикулярните направления (по  $y$  и  $z$ ).

Нека означим координатите и времето на  $S$  с непримовани букви, а координатите и времето на  $S'$  да са примовани. Ще считаме, че в началния момент двете отправни системи съвпадат. Искаме да намерим как се изразяват координатите и времето в  $S'$  чрез координатите и времето в  $S$ . Изобщо имаме, че  $x' = f(x, t)$  и  $t' = g(x, t)$ . Първото ограничение върху тези две функции е, че те трябва да са линейни, защото ако имаме движение по инерция (т.е. праволинейно и равномерно) в  $S$ , то трябва да имаме също движение по инерция в  $S'$ , тъй като двете отправни системи са инерциални. Това означава, че трансформациите на координатите и времето изобразяват прави в равнината  $(x, t)$  в прави в равнината  $(x', t')$ , което представлява условие за линейност:  $x' = \alpha_1 x + \alpha_2 t$ ,  $t' = \alpha_3 x + \alpha_4 t$ , като  $\alpha_i = \alpha_i(v)$  и сме използвали, че в началния момент двете отправни системи съвпадат.

Нека сега да разгледаме наблюдател, който седи в началото на  $S'$ , т.е. с  $x' = 0$ . Поради относителното движение на двете отправни системи наблюдателят има координата  $x = vt$ , т.е. връзката е

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (440)$$

като множителят  $\gamma = \gamma(v) = \gamma(-v)$  не зависи от посоката на относителната скорост, което е следствие от ротационната инвариантност. Обратно, ако разгледаме наблюдател, който е разположен в началото на  $S$ , т.е. с  $x = 0$ , то той ще бъде с координата  $x' = -vt'$  спрямо отправната система  $S'$ , тъй като спрямо  $S'$  наблюдателят ще се отдалечава в противоположното направление. Това води до следната обратна трансформация на координатата:

$$x = \gamma(x' + vt'). \quad (441)$$

Като използваме втория постулат на Айнщайн, нека да наложим изискването светлината да се движи с еднаква скорост  $c$  в двете отправни системи. Разглеждаме светлинен лъч, който се движи по  $x$  оста, т.е. се описва с уравненията  $x = ct$  спрямо  $S$  и  $x' = ct'$  спрямо  $S'$ . Като използваме и (440), получаваме:

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma(c - v)t = ct'. \quad (442)$$

Освен това, с помощта на (441) имаме:

$$x = \gamma(x' + vt') = \gamma(c + v)t' = ct. \quad (443)$$

<sup>(47)</sup> Вторият постулат на Айнщайн не се съгласува с трансформациите на Галилей, от които следва, че няма привилегировани скорости.

Като умножим горните две уравнения едно на друго, получаваме:

$$\gamma^2(c-v)(c+v)tt' = c^2tt' \Rightarrow \gamma^2(c^2 - v^2) = c^2 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (444)$$

Трансформацията на времето се получава, като заместим (440) в обратната трансформация на координатата (441):

$$x = \gamma(x' + vt') = \gamma^2x - \gamma^2vt + \gamma vt' \Rightarrow t' = \gamma t - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma v}x = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right). \quad (445)$$

Дотук изведохме трансформациите на  $x$ -координатата и времето. Трансформациите на останалите две координати се получават, като се съобрази, че връзката пак е линейна, но не зависи от времето, т.е.  $y' = \kappa y$  и  $z' = \kappa z$ . От ротационната инвариантност следва също така, че  $y = \kappa y'$  и  $z = \kappa z'$ , така че  $\kappa^2 = 1$ , откъдето  $\kappa = 1$  ( $\kappa = -1$  дава отражение на осите). Окончателно, *Лоренцовите трансформации* са

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right). \quad (446)$$

Обратните Лоренцови трансформации са

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma \left( t' + \frac{vx'}{c^2} \right), \quad (447)$$

т.е. примованите и непримованите величини си разменят местата, а  $v$  се заменя с  $-v$ . В граничния случай на малки скорости ( $v \ll c$ ) имаме, че  $\gamma \approx 1$  и съответно:

$$x' \approx x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' \approx t, \quad (448)$$

т.е. възстановяват се съотношенията в Нютоновата механика (Галилеевите трансформации), в частност времето отново става абсолютно. В ултрарелативистката граница  $v \rightarrow c \Rightarrow \gamma \rightarrow +\infty$ , а при  $v > c$  множителят  $\gamma$  става имагинерен, което потвърждава факта, че движението със свръхсветлинна скорост е нефизично по принцип.

Нека да проверим, че скоростта на светлината наистина е еднаква във всички инерциални отправни системи, като използваме получените Лоренцови трансформации. Разглеждаме светлинен лъч, който тръгва от началото на  $S$  и се движи по  $y$  оста. Съответно  $x = 0$ ,  $y = ct$  и  $z = 0$ . Спрямо  $S'$  имаме, че  $x' = -\gamma vt$ ,  $y' = ct$ ,  $z' = 0$ , а  $t' = \gamma t$ . Квадратът на скоростта на светлинния лъч в отправната система  $S'$  е

$$v'^2 = \frac{x'^2 + y'^2}{t'^2} = v^2 + \frac{c^2}{\gamma^2} = v^2 + c^2(1 - v^2/c^2) = c^2, \quad (449)$$

т.е. скоростта на светлината е еднаква в двете отправни системи, независимо от относителното им движение.

В СТО се използва терминът *събитие*, ако нещо се случва в определена точка от пространството  $(x, y, z)$  в определен момент от времето  $t$ . Квадратът на "разстоянието"  $\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$  между две събития  $(ct_1, x_1, y_1, z_1)$  и  $(ct_2, x_2, y_2, z_2)$  се нарича (инвариантен) *интервал*, защото е инвариантен относно Лорен-

цови трансформации (има една и съща стойност във всички инерциални отправни системи):  $\Delta s^2 = \Delta s'^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2$ . Например, за отправните системи  $S$  и  $S'$ , разгледани по-горе, се изпълнява:

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= c^2\gamma^2(t'_2 - t'_1 + v(x'_2 - x'_1)/c^2)^2 - \gamma^2[x'_2 - x'_1 + v(t'_2 - t'_1)]^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 \\ &= \gamma^2(c^2 - v^2)(t'_2 - t'_1)^2 - \gamma^2(1 - v^2/c^2)(x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 \\ &= c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 = \Delta s'^2,\end{aligned}\quad (450)$$

като сме използвали обратните Лоренцови трансформации (447).

#### 14. Лоренцови трансформации на електричното и магнитното поле. Електромагнитни скаларни инварианти. Релативистка инвариантност на вълновото уравнение.

Като се има предвид, че уравненията на Максвел описват електромагнитни вълни, които се движат с релативистки скорости, може да се очаква, че уравненията не запазват формата си при Галилееви трансформации. Нека отново да разгледаме две инерциални отправни системи с еднаква ориентация:  $S$  и  $S'$ , която се отдалечава от  $S$  със скорост  $v$ , като осите на двете отправни системи са подбрани така, че скоростта да е по посока на  $Ox$ . За компонентите на електричното и магнитното поле в двете отправни системи са валидни следните съотношения (Лоренцови трансформации на полетата):

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - vB_z), \quad E'_z = \gamma(E_z + vB_y), \quad (451)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + vE_z/c^2), \quad B'_z = \gamma(B_z - vE_y/c^2). \quad (452)$$

Може да се покаже, че уравненията на Максвел в двете отправни системи имат един и същ вид, т.е. те са релативистки ковариантни. Във векторна форма горните уравнения може да се запишат по следния начин:

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad B'_{\parallel} = B_{\parallel}, \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - (\vec{v} \times \vec{E})/c^2), \quad (453)$$

като индексът  $\parallel$  означава полето по посока на скоростта  $\vec{v}$ , която вече може да е с произволна посока, а индексът  $\perp$  е за полето, перпендикулярно на скоростта. При малки скорости (т.е. за  $|\vec{v}| \ll c$  и  $\gamma \approx 1$ ) получаваме "Галилеевите" трансформации на полетата:  $\vec{E}' \approx \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$  и  $\vec{B}' \approx \vec{B}$ .

Може да се провери, че електромагнитните скаларни инварианти  $\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2$  и  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  се запазват при прехода от една инерциална отправна система към друга:

$$\vec{E}'^2 - c^2\vec{B}'^2 = \vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 = \text{const}, \quad \vec{E}' \cdot \vec{B}' = \vec{E} \cdot \vec{B} = \text{const}. \quad (454)$$

Нека да покажем също така, че вълновите уравнения за полетата (349) не се променят при Лоренцови трансформации (например с движение по  $Ox$ ). Частните производни по координатите и времето се трансформират по следния начин:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\gamma v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad (455)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} = \gamma v \frac{\partial}{\partial x} + \gamma \frac{\partial}{\partial t}, \quad (456)$$

като сме използвали обратните Лоренцови трансформации (447). Може да се провери, че

$$\Delta' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (457)$$

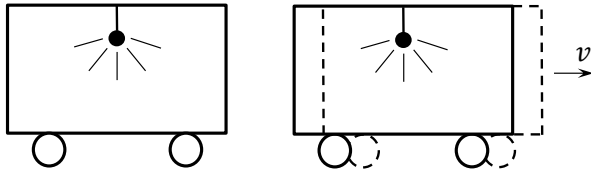
т.е. диференциалният оператор, определящ вълновото уравнение, се запазва при преход от една инерциална система към друга. Тъй като примованите полета са линейни комбинации от непримованите полета, а диференциалният оператор е линеен, в  $S'$  имаме същите вълнови уравнения като в  $S$ :

$$\Delta' \vec{E}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial t'^2} = 0, \quad \Delta' \vec{B}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial t'^2} = 0. \quad (458)$$

15. Физически ефекти на специалната теория на относителността: относителност на едновременността, забавяне на времето, скъсяване на дължината. Закон за събиране на скоростите.

*Относителност на едновременността:* Основен физически ефект, по който СТО се различава от Нютоновата механика, е относителността на едновременността на две събития. С други думи, ако имаме две събития в различни точки с координати  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$ , които са се случили по едно и също време  $t_1 = t_2$  спрямо отправната система  $S$ , то двете събития не се случват по едно и също време в друга инерциална отправна система  $S'$ , която се движи спрямо  $S$ :

$$t'_2 - t'_1 = \gamma \left( t_2 - t_1 - \frac{v(x_2 - x_1)}{c^2} \right) = -\frac{\gamma v(x_2 - x_1)}{c^2} \neq 0. \quad (459)$$



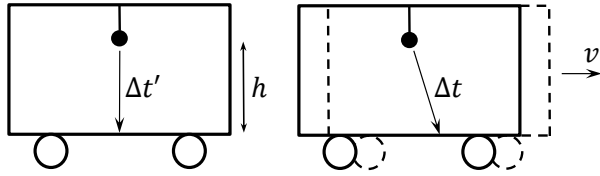
Нагледна представа за относителността на едновременността на две събития дава следната ситуация, представена на фигурата вляво. Разглеждаме движещ се вагон със скорост  $v$ , като в средата на вагона е закачена лампа, която светва в даден

момент. Ако се намирате във вагона, ще установите, че светлината достига предния и задния край на вагона по едно и също време, тъй като двата края на вагона са равноотдалечени от лампата. Обаче, ако се намирате извън движещия се вагон, за вас светлината ще достигне задния край на вагона по-бързо от предния край.

*Забавяне на времето:* Нека сега да покажем, че собственото време тече най-бавно, т.е. времето в инерциалната отправна система, в която даден наблюдател е неподвижен, тече по-бавно от времето в други инерциални отправни системи. Разглеждаме часовник, който е неподвижен (с  $x' = 0$ ) относно отправната система  $S'$  и отмерва времеви интервали с период  $T' = t'_2 - t'_1$ . Периодът относно друга инерциална отправна система  $S$  е

$$T = t_2 - t_1 = \gamma \left( t'_2 - t'_1 + \frac{v(x'_2 - x'_1)}{c^2} \right) = \gamma T' > T'. \quad (460)$$

Получихме, че времето тече по-бързо в  $S$ , тъй като  $T > T'$ .



Нагледна представа за забавянето на времето в собствената инерциална отправна система дава следната ситуация, представена на фигурата вляво. В движещ се вагон е закачена лампа, която светва в даден момент. Нека разстоянието между лампата

и пода на вагона да е  $h$ . Времето, за което светлината достига пода, е  $\Delta t' = h/c$  за наблюдател във вагона. За наблюдател извън вагона светлината трябва да измине по-дълъг път до същата точка на пода на вагона и съответното време ще бъде:

$$\Delta t = \frac{\sqrt{h^2 + v^2(\Delta t')^2}}{c} \Rightarrow \Delta t = \frac{\gamma h}{c} = \gamma \Delta t' > \Delta t'. \quad (461)$$

*Скъсяване на дължината:* Разглеждаме пръчка със собствена дължина  $L'$  (разстоянието между краищата на пръчката в отправната система  $S'$ , в която пръчката е неподвижна). В СТО дължината на даден обект винаги се получава, като се мерят координатите на краищата му в *един и същ* момент от времето. Нека в  $S'$  координатите на краищата на пръчката да са  $x'_1$  и  $x'_2$ , като съответно  $L' = x'_2 - x'_1$ . Тогава, като използваме Лоренцовите трансформации на координатите, може да намерим съотношението между  $L'$  и дължината на пръчката  $L = x_2 - x_1$  в отправната система  $S$ , но само ако  $t_1 = t_2$ :

$$L' = x'_2 - x'_1 = \gamma[x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)] = \gamma L \Rightarrow L = L'/\gamma = L'\sqrt{1 - v^2/c^2} < L', \quad (462)$$

т.е. за външен наблюдател в  $S$ , който се движи със скорост  $v$  спрямо пръчката, тя ще има по-малки размери по посоката на движение. Напречните на движението размери на телата не се изменят и в СТО.

*Закон за събиране на скоростите по  $x$ :* Нека  $x'$  компонентата на скоростта на частица спрямо отправната система  $S'$  да е  $u'$ . Да намерим каква е скоростта  $u$  (по  $x$ ) на частицата спрямо отправната система  $S$ . Като използваме обратните Лоренцови трансформации, се изпълнява:

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + vdx'/c^2}. \quad (463)$$

Нека да заместим  $dx' = u'dt'$  в горното уравнение:

$$u = \frac{u'dt' + vdt'}{dt' + vu'dt'/c^2} = \frac{u' + v}{1 + vu'/c^2}, \quad (464)$$

което ни дава закона за събиране на скорости от една инерциална отправна система в друга. Нека отново да покажем, че скоростта на светлината е еднаква във всички инерциални отправни системи. При  $u' = c$  получаваме за  $u$ :

$$u = \frac{u' + v}{1 + vu'/c^2} = \frac{c + v}{1 + v/c} = c. \quad (465)$$

Малко по-трудно е да се покаже, че ако една частица се движи със скорост по-малка от скоростта на светлината в инерциалната отправна система  $S'$  ( $|u'| < c$ ), то нейната скорост ще бъде по-малка от скоростта на светлината във всяка друга инерциална отправна система  $S$  ( $|u| < c$ ), която се движи спрямо първата отправна система със скорост

по-малка от  $c$ . С други думи, ще покажем, че ако  $|u'| < c$  и  $|v| < c$ , то  $|u| < c$ . За целта разглеждаме

$$c - u = c - \frac{u' + v}{1 + vu'/c^2} = \frac{c(c^2 + vu' - cu' - cv)}{c^2 + vu'} = \frac{c(c - v)(c - u')}{c^2 + vu'} > 0. \quad (466)$$

Нека да разгледаме също:

$$c + u = c + \frac{u' + v}{1 + vu'/c^2} = \frac{c(c^2 + vu' + cu' + cv)}{c^2 + vu'} = \frac{c(c + v)(c + u')}{c^2 + vu'} > 0. \quad (467)$$

От двете получени неравенства следва, че  $-c < u < c$ , откъдето  $|u| < c$ .

## 16. Релятивистка динамика. Връзка между маса и енергия. Закони за запазване на енергията и импулса. Разпад и разсейване на частици.

В СТО енергиите и импулсите на частиците също нямат абсолютен смисъл, а зависят от отправната система, т.е. от наблюдателя. Масивна частица, която се движи със скорост  $\vec{v}$  спрямо лабораторната отправна система  $S$ , се характеризира с релятивистка енергия и импулс:

$$E = \gamma mc^2, \quad \vec{p} = \gamma m\vec{v}, \quad (468)$$

като считаме, че на частицата не действат външни сили. Величината  $m$  се нарича *маса в покой* на частицата. Лесно се вижда, че ако  $\vec{v} = 0$ , релятивистката енергия става равна на  $E_0 = mc^2$  (енергията в покой), така че релятивистката енергия може да се представи като  $E = mc^2 + T$ , където  $T$  е кинетичната енергия на частицата. В СТО при отсъствие на външни сили се запазват *релятивистките* енергия и импулс на система от частици, т.е. няма запазване на масата и кинетичната енергия поотделно, а само на релятивистката енергия  $E$ , която е тяхна комбинация. В границата  $v \rightarrow c$  релятивисткият импулс и енергия клонят към безкрайност, което е още едно потвърждение, че скоростта на светлината във вакуум е гранична скорост.

Като повдигнем на квадрат релятивисткия импулс в (468), може да изразим  $\gamma$  чрез импулса, и като го заместим в израза за енергията (468), ще получим пряка зависимост между енергията и импулса (“дисперсионно съотношение”):

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2. \quad (469)$$

Като развием функцията  $E(p)$  в ред на Маклорен, ще получим дисперсионното съотношение при малки импулси ( $p \ll mc$ ):

$$E \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m} = E_0 + T_{\text{нер}}, \quad (470)$$

т.е. получаваме познатата нерелятивистка кинетична енергия. При много големи импулси ( $p \gg mc$ ) кинетичната енергия на частицата е много по-голяма от енергията в покой и  $E \approx pc$ , т.е. наблюдава се приблизително линейна зависимост (подобно на електромагнитните вълни във вакуум). За безмасови частици  $E = pc$ . Фотоните (преносителите на електромагнитното взаимодействие) са безмасови и имат енергия  $E = h\nu$ ,<sup>(48)</sup> откъдето

<sup>(48)</sup>  $h$  е константата на Планк, а  $\nu$  е честотата на фотоните.

импулсът им е

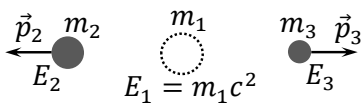
$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k, \quad (471)$$

т.е. импулсът на фотоните е пропорционален на вълновото им число. Като изразим множителя  $\gamma$  от израза за енергията (468) и го заместим в израза за импулса (468), ще получим следния израз:

$$\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2} \Rightarrow v = \frac{pc^2}{E}. \quad (472)$$

Като използваме, че енергията на безмасовите частици е  $E = pc$ , то тяхната скорост има големина  $v = c$ . Следователно всички безмасови частици се движат със скоростта на светлината и това е една от причините тази скорост да има фундаментално значение.

В процесите на разпад и разсейване на частици, които се движат с релативистки скорости, ще приемем, че отсъстват външни сили. По този начин може да използваме законите за запазване на сумарния релативистки импулс (ЗЗИ) и пълната релативистка енергия (ЗЗЕ) на системата от частици.



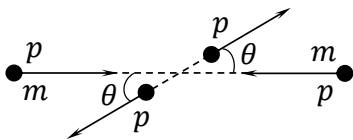
*Разпад на частица:* Първо ще разгледаме разпада на една (неподвижна) частица с маса в покой  $m_1$  на две частици с маси  $m_2$  и  $m_3$ . От законите за запазване имаме, че  $E_1 = E_2 + E_3$  и  $\vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$ , т.е. продуктите на разпада се

разлитат в противоположни посоки. Нека да означим  $p_2 = p_3 = p$ . От ЗЗЕ:

$$E_1 = m_1c^2 = \sqrt{m_2^2c^4 + p^2c^2} + \sqrt{m_3^2c^4 + p^2c^2} \geq m_2c^2 + m_3c^2, \quad (473)$$

т.е.  $m_1 \geq m_2 + m_3$ , за да се осъществи изобщо разпадът. Величината  $\Delta m = m_{\text{нач}} - m_{\text{кр}} = m_1 - m_2 - m_3$  се нарича *масов дефект* и дава частта от енергията в покой на началната частица, която се превръща в кинетична енергия на продуктите от разпада. Като повдигнем на квадрат (473) по подходящ начин, ще получим енергиите на крайните частици:

$$E_2 = \frac{(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2)c^2}{2m_1}, \quad E_3 = \frac{(m_1^2 + m_3^2 - m_2^2)c^2}{2m_1}. \quad (474)$$



*Еластично разсейване:* Нека накратко да разгледаме също така еластичното разсейване на две частици. В случая “еластично” означава, че няма превръщане на някоя от частиците в друга частица, разпад на някоя от частиците или раждане на нови частици, т.е. няма да има масов дефект, а

само евентуално преразпределяне на кинетичната енергия между двете частици. В системата на центъра на масите двете частици се движат първоначално една срещу друга и с равни по големина импулси  $p$  (вж. фигурата по-горе). Ще считаме за простота, че частиците са еднакви, т.е. с една и съща маса  $m$ . След разсейването те се отдалечават срещуположно със същите по големина импулси, но ориентацията на правата (т.е. ъгълът  $\theta$  на фигурата горе вляво), по която се движат, не може да се определи от законите за запазване, т.е. по принцип има свободни параметри, от които зависят импулсите и енергиите на частиците след разсейването.

<sup>(49)</sup>  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  се нарича редуцирана константа на Планк.

*Релативистко движение в постоянно електрично поле:* Частица с маса  $m$  и заряд  $q > 0$  се движи в постоянно електростатично поле с интензитет  $\vec{E} = (E, 0, 0)$ ,  $E > 0$ . Началните условия на движение са  $\vec{r}(0) = 0$  и  $\vec{p}(0) = (0, p_0, 0)$ ,  $p_0 > 0$ . Нека да намерим законите за движение  $x(t)$  и  $y(t)$ , както и траекторията  $x(y)$ .

Движението по  $x$  се определя лесно, като се използва изразът за изменението на енергията:

$$E - E(0) = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - \sqrt{m^2c^4 + p_0^2c^2} = A = F_x x = qEx. \quad (475)$$

От друга страна  $\dot{p}_x = F_x = qE$ , откъдето  $p_x = qEt$ . По  $y$  не действат никакви сили, така че  $\dot{p}_y = 0$  и  $p_y = p_0 = \text{const}$ . Като заместим компонентите на импулса в уравнението за енергията, ще получим, че

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\sqrt{m^2c^4 + p_0^2c^2 + q^2E^2c^2t^2} - \sqrt{m^2c^4 + p_0^2c^2}}{qE} \\ &= \frac{\sqrt{m^2c^4 + p_0^2c^2}}{qE} \left( \sqrt{1 + \frac{q^2E^2c^2t^2}{m^2c^4 + p_0^2c^2}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (476)$$

Нека да разгледаме два частни случая:

$$1) \ t \ll \frac{\sqrt{m^2c^4 + p_0^2c^2}}{cqE} \Rightarrow x(t) \approx \frac{qEc^2t^2}{2\sqrt{m^2c^4 + p_0^2c^2}}; \quad (477)$$

$$2) \ t \gg \frac{\sqrt{m^2c^4 + p_0^2c^2}}{cqE} \Rightarrow x(t) \approx ct. \quad (478)$$

Първият случай описва нерелативистко движение с постоянно ускорение, а вторият – ултрарелативистко движение със скоростта на светлината.

Движението по  $y$  може да се получи, като използваме равенството  $\vec{v} = \vec{p}c^2/E$ , откъдето

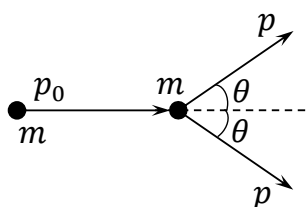
$$\dot{y} = \frac{p_y c^2}{E} = \frac{p_0 c^2}{E} = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{m^2c^4 + p_0^2c^2 + q^2E^2c^2t^2}}. \quad (479)$$

След това интегрираме по времето:

$$y(t) = p_0c^2 \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{m^2c^4 + p_0^2c^2 + q^2E^2c^2t^2}} = \frac{p_0c}{qE} \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{p_0c}{qE} \operatorname{arcsinh} \frac{qEct}{\sqrt{m^2c^4 + p_0^2c^2}}, \quad (480)$$

където  $u = qEct/\sqrt{m^2c^4 + p_0^2c^2}$ . Уравнението за траекторията се получава от законите за движение по  $x$  и  $y$ :

$$x(y) = \frac{\sqrt{m^2c^4 + p_0^2c^2}}{qE} \left( \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{qEy}{p_0c}} - 1 \right) = \frac{\sqrt{m^2c^4 + p_0^2c^2}}{qE} \left( \cosh \frac{qEy}{p_0c} - 1 \right). \quad (481)$$



*Симетрично еластично разсейване:* Нека да разгледаме един частен случай на еластично разсейване: частица с маса  $m$  и кинетична енергия  $T_0$  се разсейва от неподвижна частица от същия вид, като налагаме условието след взаимодействието двете частици да се движат симетрично (под еднакъв ъгъл  $\theta$ ) спрямо посоката на движение на първоначално движещата се частица.

От ЗЗИ в перпендикулярното на първоначалното движение направление имаме, че след разсейването импулсите на двете частици имат равни големина  $p_1 = p_2 = p$ . От ЗЗИ по посоката на първоначално движение следва, че  $p_0 = 2p \cos \theta$ . ЗЗЕ дава

$$T_0 + 2mc^2 = \sqrt{m^2c^4 + p_0^2c^2} + mc^2 = 2\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}. \quad (482)$$

От горното уравнение може да изразим  $p$  и да го заместим в ЗЗИ, откъдето:

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{T_0 + 2mc^2}{T_0 + 4mc^2}}. \quad (483)$$

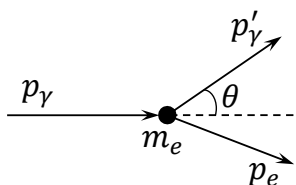
Нека да разгледаме три частни случая:

1) нерелативистка граница ( $T_0 \ll mc^2$ ) – в този случай може да пренебрегнем  $T_0$  в израза за  $\cos \theta$  и ще получим, че  $\cos \theta \approx \sqrt{2}/2$ , т.е.  $\theta \approx 45^\circ$ . Ъгълът, който сключват импулсите на частиците след разсейването, е  $2\theta \approx 90^\circ$ , което е точно резултатът, който се получава в Нютоновата механика за нецентрален удар между тела с еднакви маси.

2)  $T_0 = mc^2$  – получаваме, че  $\cos \theta = \sqrt{3}/5$ , т.е.  $\theta \approx 39^\circ$  и ъгълът между посоките на движение на частиците след разсейването е  $2\theta \approx 78^\circ$  (по-малък отколкото в нерелативистката механика).

3) ултрарелативистка граница ( $T_0 \gg mc^2$ ) – може да пренебрегнем енергията в покой на частицата, като  $\cos \theta \approx 1$ , т.е.  $\theta \approx 0$  и частиците се движат по едно и също направление след разсейването.

## 17. Ефект на Комптън. Ефект на Вавилов–Черенков.



*Ефект на Комптън:* Нека фотон с честота  $\nu$  се разсейва от неподвижен електрон с маса  $m_e$ . Енергията на фотона преди взаимодействието е  $E_\gamma = h\nu$ , а след взаимодействието ще бъде  $E'_\gamma = h\nu' \leq E_\gamma$ . Ще означим енергията на електрона след взаимодействието с  $E_e$ . Основната ни цел е да намерим изменението (по-точно нарастването) на дължината на вълната на фотона при определен ъгъл на разсейване  $\theta = \angle(\vec{p}_\gamma, \vec{p}'_\gamma)$  (ъгълът между посоките на движение на фотона преди и след разсейването от електрона).

От ЗЗИ следва, че  $\vec{p}_\gamma = \vec{p}'_\gamma + \vec{p}_e$ , където  $\vec{p}_e$  е импулсът на разсеяния електрон. Като се използва правилото на триъгълника за събиране на два вектора, може да се покаже, че съществува триъгълник със страни с дължини  $p_\gamma$ ,  $p'_\gamma$  и  $p_e$ , като ъгълът между страните с дължини  $p_\gamma$  и  $p'_\gamma$  е  $\theta$ . От косинусовата теорема за този триъгълник следва, че

$$p_e^2 = p_\gamma^2 + p'^2_\gamma - 2p_\gamma p'_\gamma \cos \theta. \quad (484)$$

Като умножим горното равенство с  $c^2$ , може да получим следната връзка между енерги-

ите на частиците:

$$E_e^2 - m_e^2 c^4 = E_\gamma^2 + E_\gamma'^2 - 2E_\gamma E_\gamma' \cos \theta. \quad (485)$$

ЗЗЕ гласи в случая, че

$$E_\gamma + m_e c^2 = E_\gamma' + E_e. \quad (486)$$

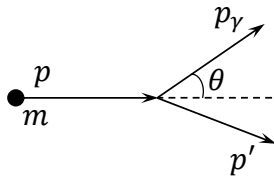
Изразяваме  $E_e$  от ЗЗЕ и го заместваем в (485), при което след опростяване се получава:

$$m_e c^2 (E_\gamma - E_\gamma') = E_\gamma E_\gamma' (1 - \cos \theta). \quad (487)$$

Като използваме, че  $E_\gamma = hc/\lambda$  и  $E_\gamma' = hc/\lambda'$ , стигаме до крайния резултат:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) = \frac{2h \sin^2 \frac{\theta}{2}}{m_e c}. \quad (488)$$

Величината  $\frac{h}{m_e c}$  се нарича *Комптънова дължина на вълната* на електрона. Получихме как нарастването на дължината на вълната на фотон след взаимодействие с неподвижен електрон зависи от ъгъла на разсейване  $\theta$ .



*Ефект на Вавилов-Черенков:* Заредена частица с маса  $m$ , която се движи праволинейно и равномерно със скорост  $\vec{v}$  в среда с показател на пречупване на светлината  $n$ , може да излъчи фотон, ако се движи със "свръхсветлинна" за средата скорост. Нека да получим ъгъла  $\theta = \angle(\vec{p}, \vec{p}_\gamma)$ , под който се излъчва фотонът. Ще използваме, че импулсът на фотона в средата е

$p_\gamma = nE_\gamma/c = nh\nu/c$ . Ще считаме, че енергията на излъчения фотон е много по-малка от енергията в покой на частицата:  $E_\gamma \ll mc^2$ . От ЗЗЕ имаме, че  $E = E' + E_\gamma$ , където  $E$  е енергията на частицата преди излъчването на фотона, а  $E'$  е енергията на частицата след излъчването. След повдигане на квадрат на равенството се получава:

$$E'^2 = E^2 + E_\gamma^2 - 2EE_\gamma \Rightarrow p'^2 c^2 = p^2 c^2 + E_\gamma^2 - 2EE_\gamma, \quad (489)$$

като сме използвали релятивисткото дисперсионно съотношение. От ЗЗИ ( $\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_\gamma$ ) следва, че  $p$ ,  $p'$  и  $p_\gamma$  са дължини на страни в триъгълник. От косинусовата теорема, приложена за този триъгълник, се получава, че

$$p'^2 = p^2 + p_\gamma^2 - 2pp_\gamma \cos \theta. \quad (490)$$

Заместването на  $p'^2$  от горното равенство в (489) ни дава:

$$p_\gamma^2 c^2 - 2pp_\gamma c^2 \cos \theta = E_\gamma^2 - 2EE_\gamma \Rightarrow (n^2 - 1)E_\gamma + 2E = 2npc \cos \theta. \quad (491)$$

Като използваме, че  $E_\gamma \ll mc^2 < E$ , се получава:

$$E \approx npc \cos \theta \Rightarrow \cos \theta \approx \frac{E}{npc} = \frac{c}{nv} \leq 1. \quad (492)$$

Лесно се вижда, че за да има излъчване, трябва  $v \geq c/n$ , т.е. заредената частица трябва да се движи *по-бързо* от светлината в дадената среда.