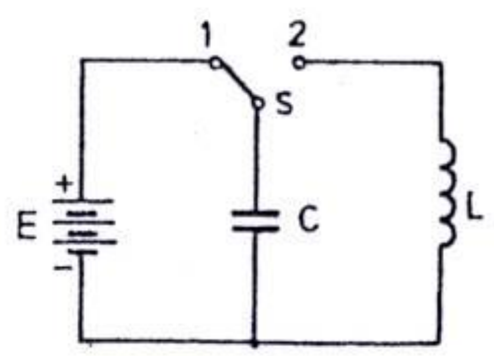
9. Трептящи кръгове

1. Определение

Трепящ кръг е пасивна електрическа верига, в която са свързани индуктивност и капацитет. При определени условия в него могат да възникнат електрически трептения (променлив ток и напрежение с определена честота).

Нека разгледаме система от батерия и идеални кондензатор и бобина (без загуби).



- (1) кондензатора се зарежда до напрежение - U_{Cm}

$$W_c = \frac{1}{2} C U^2_{Cm}$$ - количество енергия натрупана в електричното поле на кондензатора

- в положение (2) на ключа - кондензатора се разрежда през бобината, като протича електричен ток с максимална амплитуда I_{Lm}

$$W_L = \frac{1}{2} L.I^2_{Lm}$$ - количество енергия натрупана в магнитното поле на бобината

Този процес на преминаване на енергията от кондензатора в бобината и обратно е свързан с протичането на променлив синусоидален ток и напрежение в кръга.

9. Трептящи кръгове

Енергията на електричното поле на кондензатора намалява, а енергията на магнитното поле на бобината се увеличава (превръщане от електрическа в магнитна енергия)

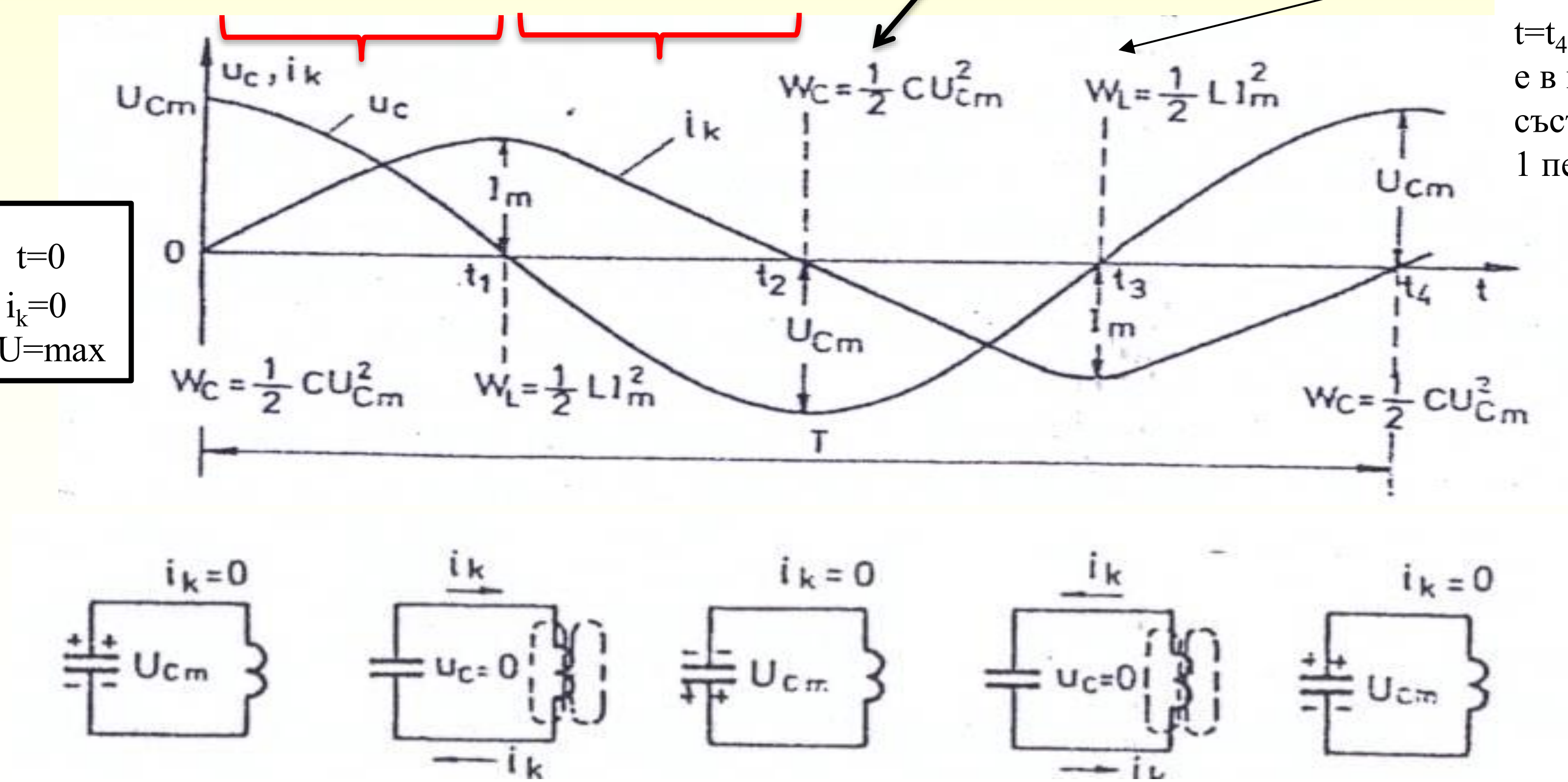
Превръщане на магнитната в електрическа енергия

Енергията на веригата е изцяло електрическа (съсредоточена е отново в кондензатора)

$t=t_3$ Пълно разреждане на кондензатора (ток с обратен знак).Енергията е съсредоточена в магнитното поле на бобината.

$t=t_4$, системата е в начално състояние, 1 период T

$t=0$
$i_k=0$
$U=max$



9. Трептящи кръгове

Електрическите трептения на напрежението и тока са в резултат на непрекъснатото преобразуване на електричната в магнитна енергия и обратно.

1. Периодичното изменение на тока и напрежението става по синусоиден закон, като двете величини са **дефазирани на 90^0**

2. Пълно трептене от $t = 0$ до t_4 *(С се зарежда до първоначалното* U_{Cm} *) с* **период** Т.

Собствени (свободни) трептения на кръга – трептенията в кръга се получават без външно въздействие.

2. Параметри на идеален трептящ кръг

Трептящ кръг без загуби се нарича идеален. Активното съпротивление на идеалния кръг е нула (бобината, проводниците и кондензатора са без загуби).

няма дисипиране на енергия

↓

амплитудите на напрежението и тока остават постоянни с времето (незатихващи трептения)

9. Трептящи кръгове

$f_k(L,C)$ - честота на свободните трептения в кръга

$W_C = W_L$ - максималните стойности на електрическата и магнитна енергия са равни

$$\frac{1}{2}LI^2{}_m = \frac{1}{2}CU^2{}_{Cm}$$

$U_{Cm} = I_m.(\omega_k L)$ – *връзка между напрежението и тока*

$$LI^2{}_m = C.I_m^2.\omega_k^2.L^2$$

$\omega_k = 2\pi f_k$ – ъглова честота на трептенията в кръга,

при линейни елементи не зависи от:

I_m, U_{Cm} – *амплитуди на тока и напрежението*

$$\frac{1}{L.C} = \omega_k^2 \rightarrow \omega_k = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Ъглова честота, честота и период на свободните трептения

$$\omega_k = \frac{1}{\sqrt{LC}}\ (rad/s) \qquad f_k = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\ (Hz) \qquad T = \frac{1}{f_k} = 2\pi\sqrt{LC}\ (s)$$

Задача: L=0.4 mH, C=1.6 nF, Определете w, f, T на трептенията?

9. Трептящи кръгове

характеристично съпротивление на трептящия кръг

$$W_C = W_L \Rightarrow \frac{1}{2} L I^2{}_m = \frac{1}{2} C U^2{}_{Cm} \rightarrow U^2{}_{Cm} = \frac{1}{C} L I^2{}_m$$

$$\frac{U^2{}_{Cm}}{I^2{}_m} = \frac{L}{C} = \rho^2$$

$$\rho = \frac{U_{Cm}}{I_m} = \sqrt{\frac{L}{C}} \ (\Omega)$$

Задача: ρ=?

$X_L = \omega_k L$ – *индуктивно съпротивление на бобината при резонанс*

$X_C = \dfrac{1}{\omega_k C}$ – *капацитивно съпротивление на кондензатора*

$$X_L = \omega_k . L = \frac{1}{\sqrt{LC}} L = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

$$X_C = \frac{1}{\omega_k C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

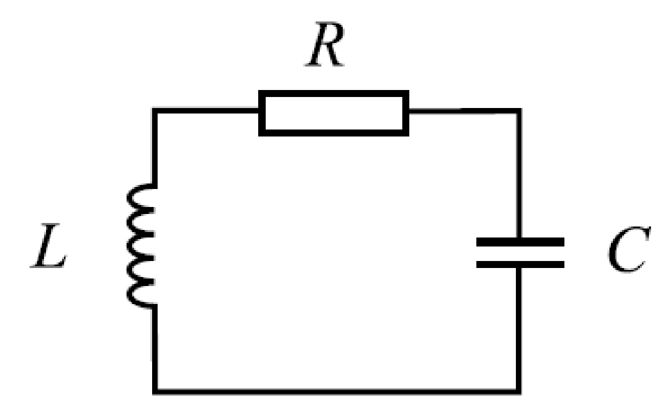
Характеристичното съпротивление на кръга е равно на индуктивното съпротивление на бобината или на капацитивното съпротивление на кондензатора за честотата на собствените трептения ω_k .

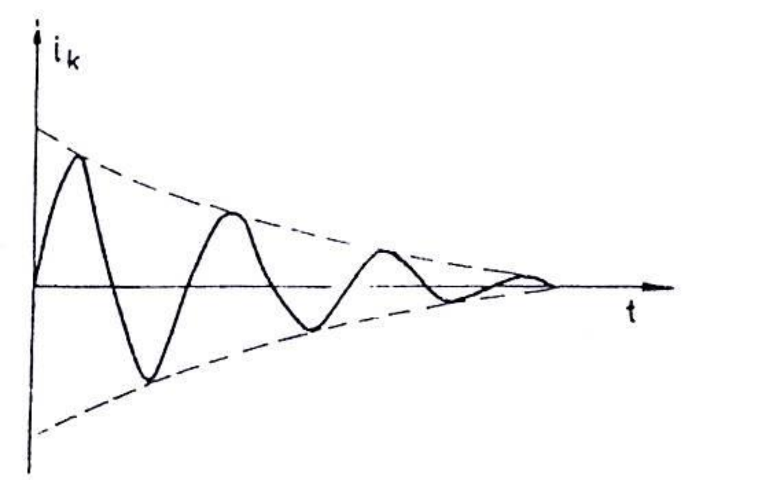
3. Параметри на реален трептящ кръг

В реалните трептящи кръгове ***винаги*** *има загуби на енергия, дължащи се на наличието на активно съпротивление R (проводници на бобината и др.).*

част от енергията се изразходва във вид на топлина

амплитудата на трептенията намалява (затихва) с времето





9. Трептящи кръгове

Трептенията в кръга затихват толкова по-бързо, колкото по-голяма част от първоначално натрупаната енергия се изразходва за един период на трептенето T.

R – съпротивление на загуби;

$R_{кр} = 2.\rho$ – критична стойност на съпротивлението на загуби

$R < R_{кр}$ – условие за съществуване на трептения в кръга

Качествен фактор (Q-фактор) на кръга – показва, колко пъти запасената реактивна енергия е по-голяма от активната енергия, изразходвана във вид на топлина.

$$Q = \frac{\rho.I^2}{R.I^2} = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_k L}{R} = \frac{1}{\omega_k C.R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

типични стойности: $100 < Q < 300$

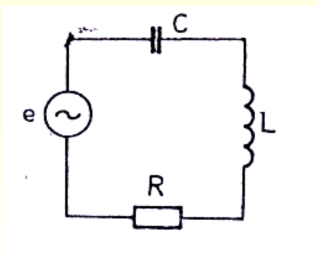
Задача: R=5 Ω, Q=?

- В практиката, за получаване на незатихващи трептения е необходимо **непрекъснато допълване на енергията в кръга** за да се компенсират загубите – кръга се включва към променливотоков генератор с определена честота и възникват **принудени трептения.**

9. Трептящи кръгове-принудени трептения

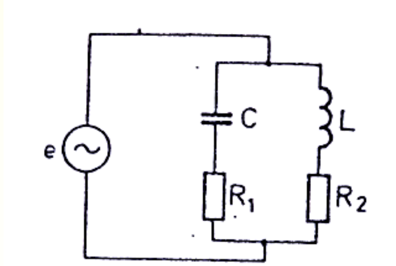
видове ТК според начина на свързване с генератора

последователен

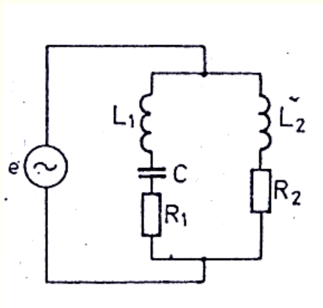


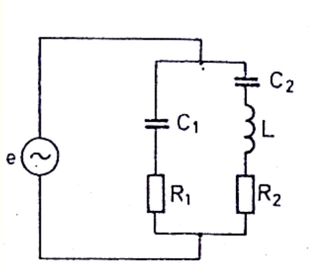
паралелен

прост



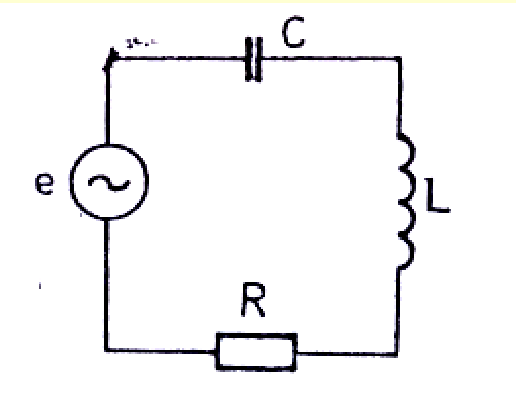
сложен





Принудени трептения – незатихващи трептения с **честота**, определена от честотата на генератора.

4. Последователен трептящ кръг със затихване



C – кондензатор **L** – бобина

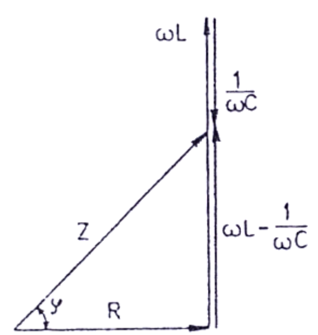
E – генератор на синусоидно напрежение на честота **ω**

R – активно съпротивление
(отразява загубите и условно се представя като отделен елемент)

Честотата на трептенията се определя от **честотата на генератора.** За генератора кръгът е **товар с честотно зависим импеданс.**

$$\dot{Z} = \frac{1}{j\omega C} + j\omega L + R = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j(X_L - X_C) = z.e^{j.\varphi}$$

импеданс на кръга



-модул на импеданса на трептящия кръг:

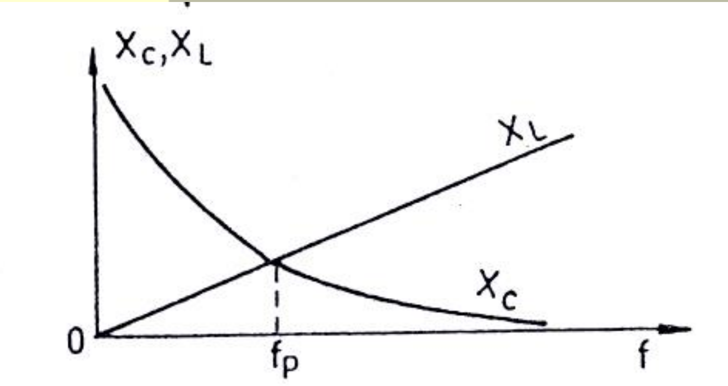
$$z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z}\right) = arctg\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$$

φ –аргумент на импеданса

z(ω), φ(ω) – честотно зависими величини

9. Трептящи кръгове



$$Ако \quad f = 0 \Rightarrow 1/\omega C \to \infty, z \to \infty$$

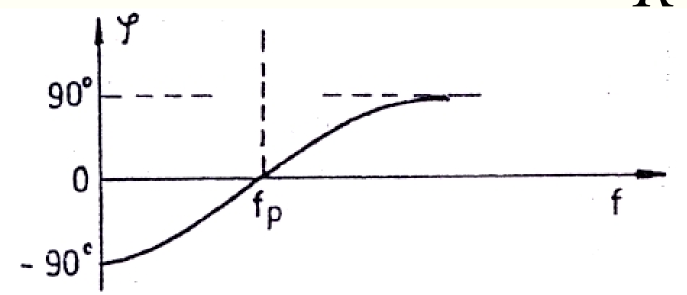
$$Ако \;\; f\uparrow \;=>\; X_C\downarrow \;\; и \;\; X_L\uparrow$$

$$\boxed{0 < f < f_p}$$

$f_p = f_к$ резонансна честота равна на честотата на собствени трептения

- капацитивен характер на импеданса - **токът** протичащ през веригата **изпреварва** напрежението на генератора

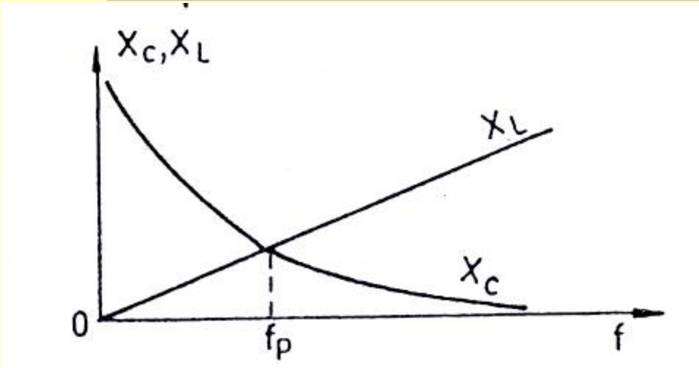
$$tg\varphi = \frac{X}{R} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$



φ - ъгъл на дефазиране м/у тока и напрежението

$$Ако \; f\uparrow \Rightarrow \varphi\downarrow$$

9. Трептящи кръгове



$$X_L = X_C \quad X = X_L - X_C = 0$$

$$2\pi f_p L = \frac{1}{2\pi f_p C}$$

$$\boxed{f = f_p}$$

$$f_p = f_k = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$f_p = f_k$ – резонансна честота е равна на честотата на собствени трептения

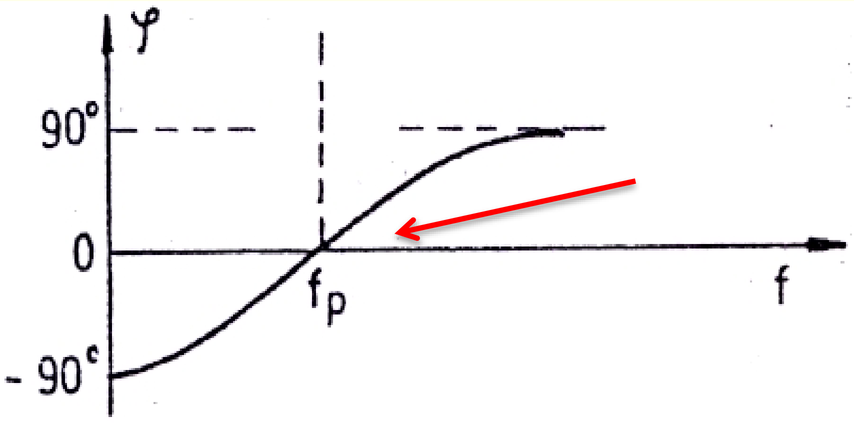
f_k - собствена честота на трептящия кръг

9. Трептящи кръгове

$$z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + 0} = R$$

При резонанс импедансът на кръга има минимум и се проявява по отношение на генератора, само като активно съпротивление $Z_p = R$!

(двете реактивни съпротивления са противоположни по знак и взаимно компенсират влиянието си в импеданса на кръга)

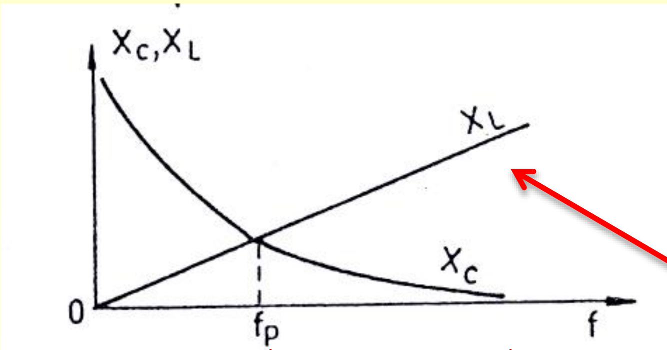


напрежението на генератора и токът в кръга са във фаза и $\varphi = 0$

$$2\pi f_p L = \frac{1}{2\pi f_p C} = \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Реактивните съпротивления на бобината и на кондензатора за резонансната честота са равни на характеристичното съпротивление на кръга.

9. Трептящи кръгове



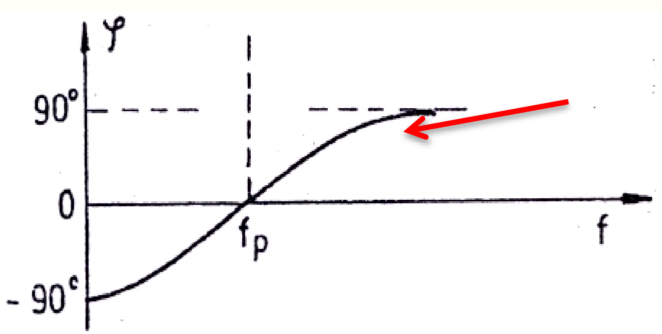
- при по високи от f_p честоти се проявява индуктивния характер на Z.

по-голямо е индуктивното съпротивление

$$\boxed{f > f_p}$$

$$Ако\ f \uparrow \Rightarrow (X_L - X_C) \uparrow \Rightarrow Z \uparrow$$

- в тази честотна област импеданса има индуктивен характер

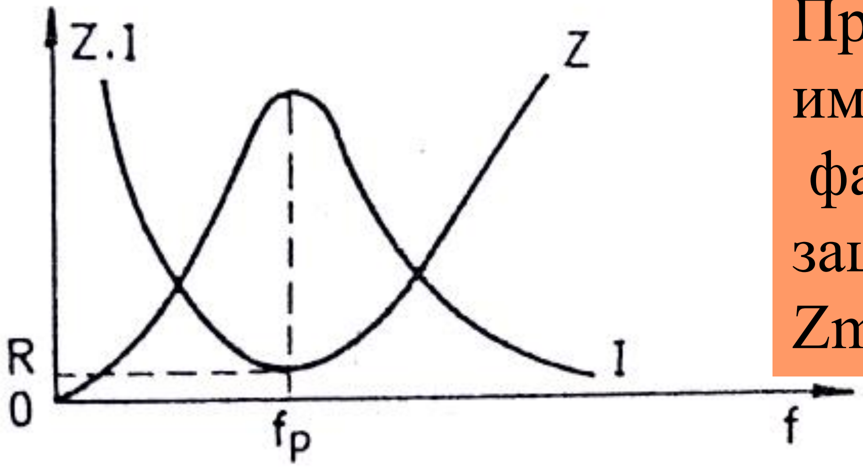


токът във веригата изостава спрямо генераторното напрежение с ъгъл φ

9. Трептящи кръгове

$$I_m = \frac{E}{z} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

I_m– амплитудата на тока, който протича през кръга, има обратна честотна зависимост в сравнение със Z.



При резонанс $f = f_p$ – токът в кръга има максимална стойност и е във фаза с генераторното напрежение защото импеданса има минимум Zmin = R.

$$I_{\max} = \frac{E}{Z_P} = \frac{E}{R}$$

Зад. Определете Imax, ако E=2 V

9. Трептящи кръгове

$$U_m = I_m.z = \mathrm{I}_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \mathrm{I}_m R$$

$$\dot{U}_L = \dot{I}.(\mathrm{j}\omega \mathrm{L}); \quad \dot{U}_C = \dot{I}.\frac{1}{j\omega C} = -j.\dot{I}(\frac{1}{\omega C});$$

$$\dot{\mathrm{U}} = \dot{U}_L + \dot{U}_C + \dot{U}_R = j(\dot{I}.X_L - \dot{I}.X_C) + \dot{I}.R$$

падовете на напрежение създадени от тока през кръга са честотно зависими величини

- При резонанс падовете върху бобината и кондензатора са максимални, те са равни но с противоположен знак!

$$U_{Lp} = I_p X_{Lp} = \frac{E}{R}\rho = Q.E$$

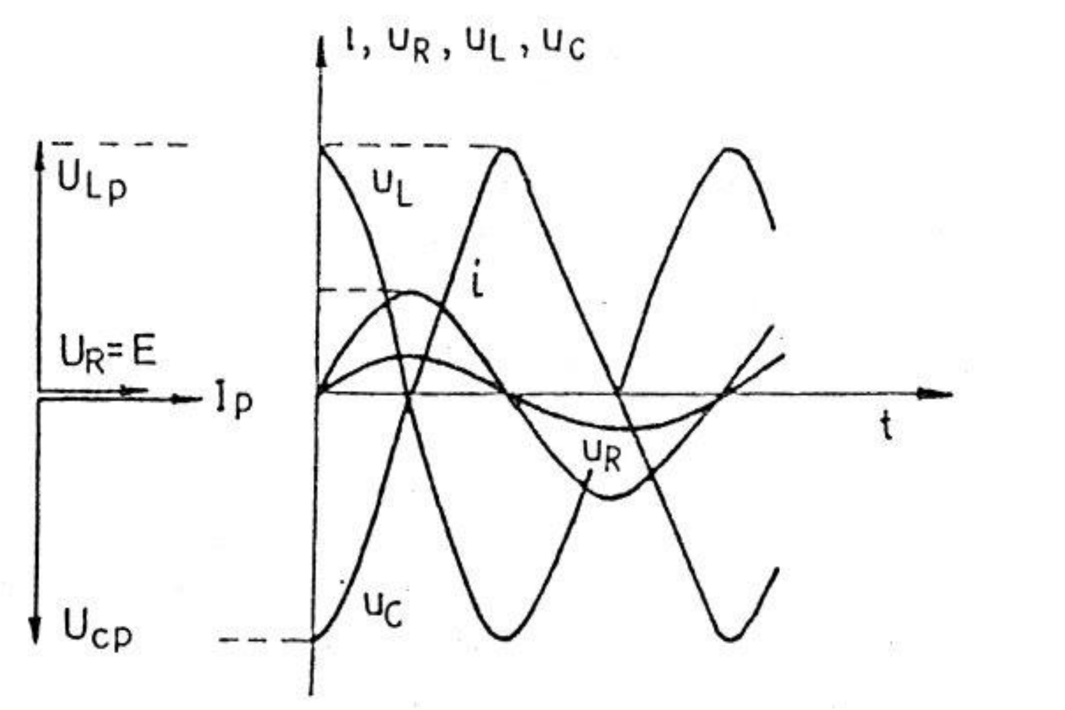
$-$ ***резонанс на напрежение***

$$U_{Cp} = I_p X_{Cp} = \frac{E}{R}\rho = Q.E$$

$$Q \sim 50 - 500$$

Зад. Определете Ucp= ? V при резонанс?

9. Трептящи кръгове

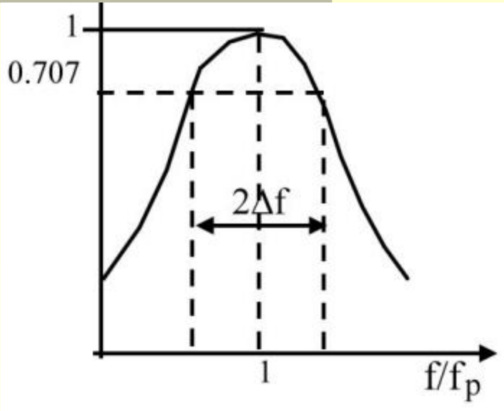


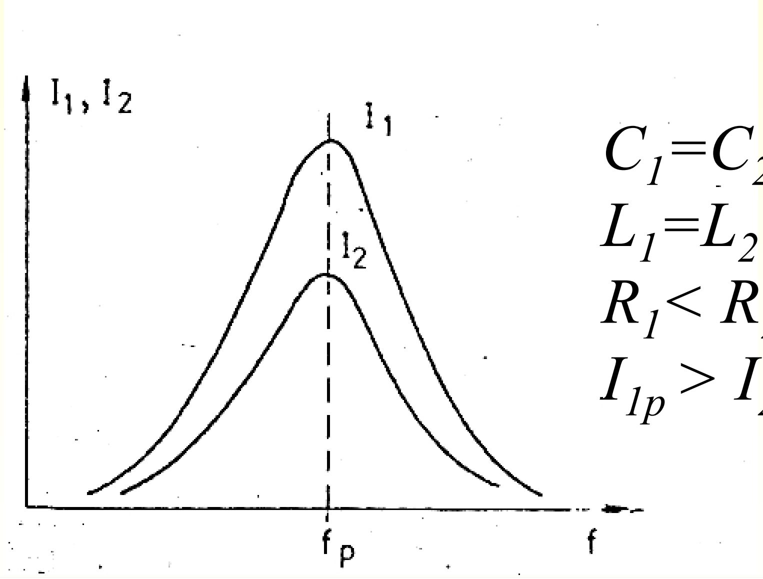
- След възникване на трептения генераторът доставя в кръга само незначителна активна енергия, за да компенсира загубите в *R*.

Запасената в L и C енергия не се губи, а се трансформира от магнитна в електрична и обратно.

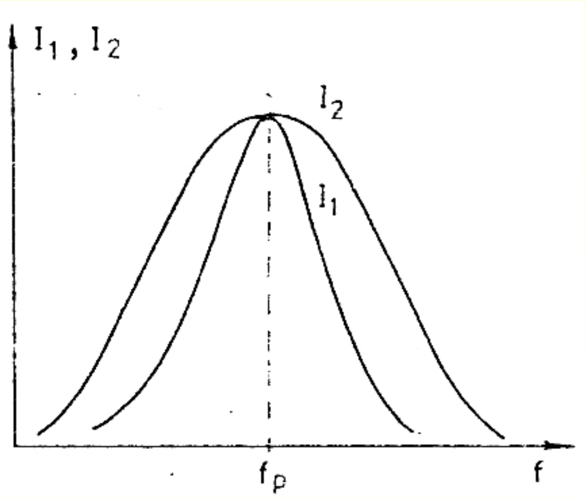
9. Трептящи кръгове

4.1 Честотни (резонансни) характеристики на последователен трептящ кръг- *I(f)*





$C_1=C_2$
$L_1=L_2$
$R_1< R_2$
$I_{1p} > I_{2p}$

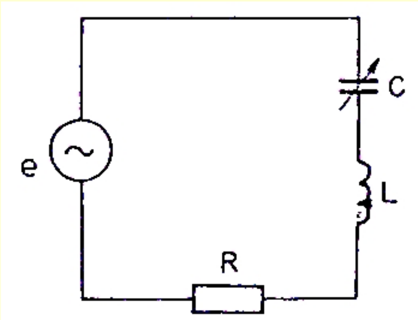


$L_1C_1= L_2C_2$
$R_1=R_2$
$\rho_1 > \rho_2$
$Q_1>Q_2$
$I_{1p}=I_{2p}$

Колкото качествения фактор Q на кръга е по-голям, толкова тясна(по-стръмна) е честотната му характеристика ($Q=f_0/(2\Delta f)$).

9. Трептящи кръгове

Начини за получване на резонанс в последователен кръг:

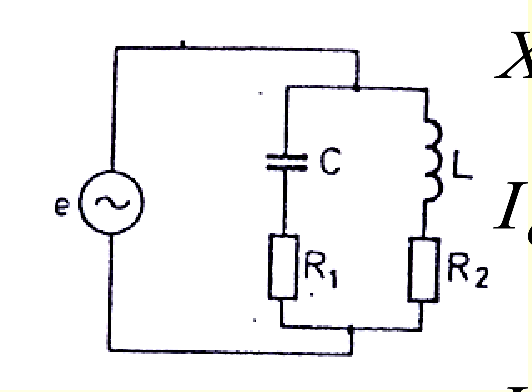


- Вариране на честотата на генератора;
- Използване на променлив елемент *(кондензатор с променлив капацитет или променлива бобина)*

Честотна избирателност (селективност) – свойството на кръга да пропуска честоти близки до собствената му честота f_k се определя от стръмността на честотната характеристика.

Избирателността на кръга е толкова по-голяма, колкото по-стръмна е честотната му характеристика (колкото е по-голям качественият му фактор).

4. Паралелен трептящ кръг



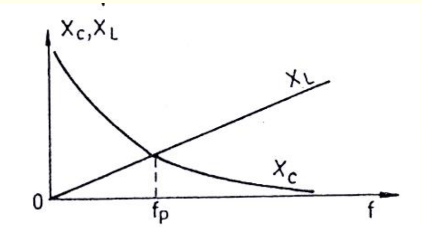
- Ако кръга е идеален ($R_1=R_2=0$):

$$X_C = 1/(\omega C),\ X_L = \omega L$$

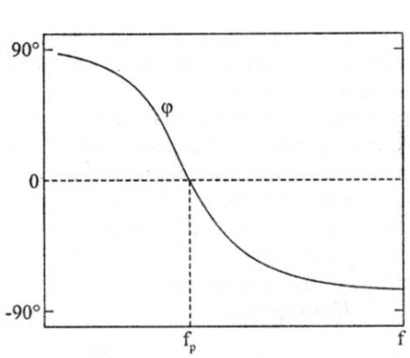
$$I_C = \frac{U}{Z_C} = j\omega CU = j2\pi f.C.U$$

$$I_L = \frac{U}{Z_L} = \frac{U}{j\omega L} = -j\frac{U}{2\pi f.L}$$

Токът във веригата е разлика между токовете през L и C.



$$I_0 = I_L + I_C = -j\left(\frac{U}{X_L} - \frac{U}{X_C}\right),\ I_0 = U/Z$$



Импедансът се определя от по-малкото съпротивление с увеличаване на честотата:

$$\frac{1}{-jX_C} + \frac{1}{jX_L},\ Z = \frac{j(2\pi f.L)}{1-(2\pi f)^2 LC},\ z = \frac{\omega L}{1-\omega^2 L.C}$$

9. Трептящи кръгове

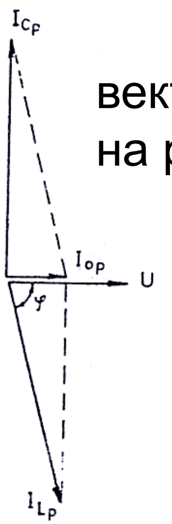
При ниска честота $f < f_p$ импедансът има индуктивен характер и токът изостава от генераторното напрежение с ъгъл φ.

При резонансната честота $f_p = f_k \Rightarrow X_L = X_C$ и $I_0 = I_L - I_C = 0$

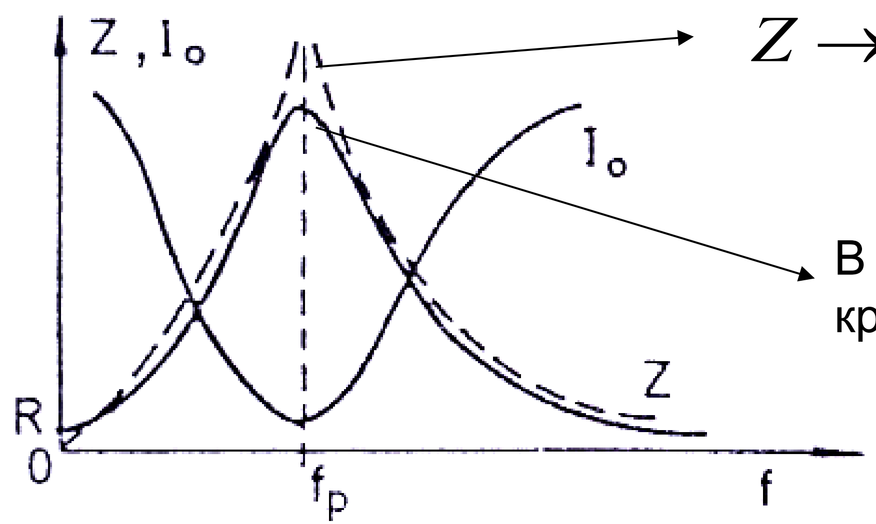
При резонанс $f_p = f_k = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ в идеален паралелен трептящ

кръг импедансът има безкрайно голяма стойност $Z \rightarrow \infty$.

При висока честота $f > f_p$, Z има капацитивен характер $I_0 = I_C - I_L$



векторна д-ма
на реален кръг



$Z \rightarrow \infty$ при $R_L = 0$

В реален кръг Z има крайна стойност.

$R_C \approx 0,\ R_L \neq 0$

9. Трептящи кръгове

- В реален трептящ кръг : $R_{1C} \approx 0, R_{2L} \neq 0$ $\omega_p L = \dfrac{1}{\omega_p C} = \rho = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$$\dot{Y} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right), \quad \textit{нека}\ (\omega L)^2 >> R^2$$

В реалния паралелен трептящ кръг при резонанс импедансът има активен характер (само първия член в Y) а неговата стойност е:

$$Z_p = \frac{1}{Y_p} = \frac{\omega_p^2 L^2}{R} = \frac{1}{L.C}\frac{L^2}{R} = \frac{L}{R.C} = \frac{\rho^2}{R} \quad \rightarrow \frac{Z_p}{R} = Q^2; \frac{Z_p}{X_{Lp}} = Q$$

$$I_{0p} = \frac{U}{Z_p} = \frac{U}{\dfrac{L}{RC}}; \quad I_{Cp} = I_{Lp} = \frac{U}{\rho} = \frac{U}{\sqrt{\dfrac{L}{C}}},$$

Задача6: L=0.4 mH, L=1.6 nF, R=2Ω
Определете Zp на паралелен тр. кръг ?

$$\frac{I_{Cp}}{I_{0p}} = \frac{U}{\sqrt{\dfrac{L}{C}}} : \frac{U}{\dfrac{L}{RC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R} = Q$$

Токът през кондензатора и бобината са Q пъти по-големи от тока през външната верига!

9. Трептящи кръгове

При резонанс в паралелния трептящ кръг протичат токове $I_{Cp} = I_{Lp}$, Q пъти по-големи от тока I_{0p}, който протича от генератора към кръга.

Резонансът в паралелен трептящ кръг се нарича **резонанс на тока**.

Товарната характеристика на реален източник на напрежение с вътрешно съпротивление R_G:

$$U = e - I_0 R_G = I_0 . Z$$

а) вътрешното съпротивление е много по-малко от импеданса на кръга:

$$R_G << Z \Rightarrow U \approx e \rightarrow I_0 = \frac{e}{Z} \rightarrow \min I_{0p} = \frac{e}{Z_p}$$

I - зависи от честотата *f*

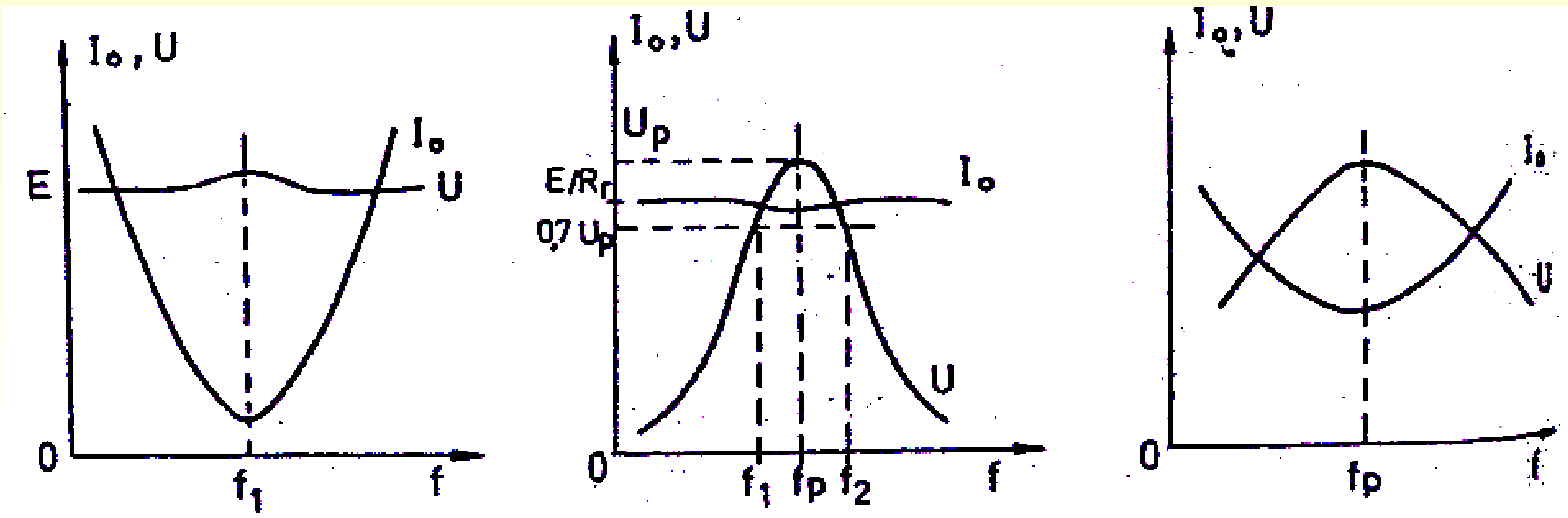
б) вътрешното съпротивление е много по-голямо от импеданса на кръга:

$$R_G >> Z \Rightarrow I_0 = \frac{e}{R_G + Z} \approx \frac{e}{R_G} \rightarrow U = I_0 . Z = \frac{e}{R_G} Z$$

U- зависи от честотата *f*

9. Трептящи кръгове

в) вътрешното съпротивление е с близка стойност до импеданса на кръга:



Лента на пропускане на сигнала :

$$2.\Delta f = f_2 - f_1 \rightarrow U = \frac{U_p}{\sqrt{2}} = 0.707 \cdot U_p$$

4. Свързани трептящи кръгове

Два кръга се наричат свързани, когато енергията преминава от единия в другия кръг.

- кръгът, който се захранва от генератора се нарича **първичен**,

- кръгът, в който възникват трептения под въздействието на първичния кръг се нарича **вторичен.**

Връзката между кръговете може да се осъществи чрез общо електрично поле, чрез общо магнитно поле или чрез общо съпротивление.

9. Трептящи кръгове

4.1 Видове връзки, коефициент на връзка

вид на елемента, който осъществява връзката

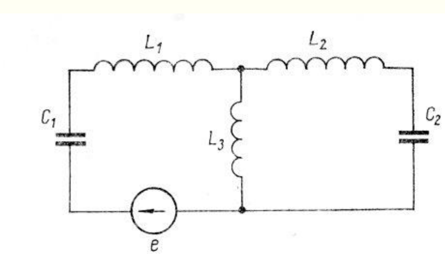
индуктивност

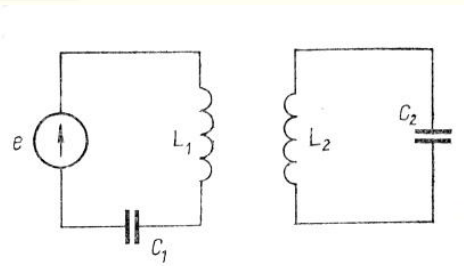
- индуктивна (автотрансформаторна)
- трансформаторна

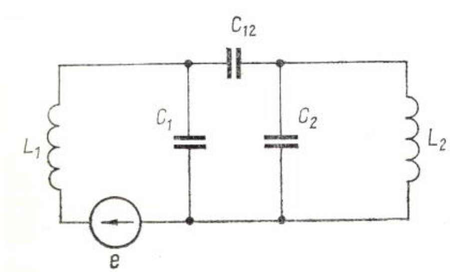
съпротивление

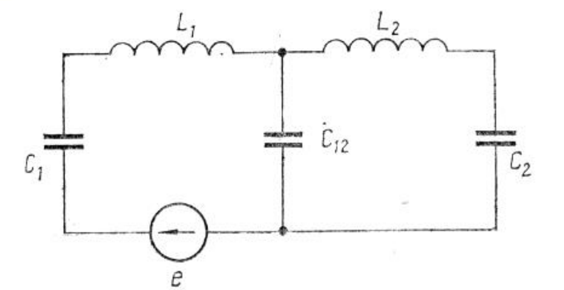
кондензатор

- външна капацитивна връзка
- вътрешна капацитивна връзка



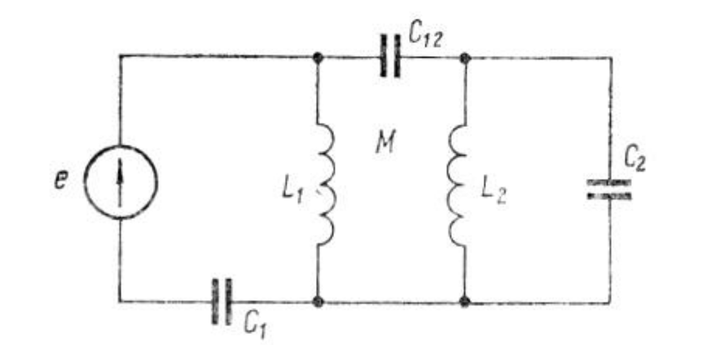






9. Трептящи кръгове

- комбинирана връзка



- коефициент на връзката к (характеризира големината на връзката)

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \sqrt{\frac{U_{21m} U_{12m}}{U_{1m} U_{2m}}} \qquad k_1 = \frac{U_{21m}}{U_{1m}} \qquad k_2 = \frac{U_{12m}}{U_{2m}}$$

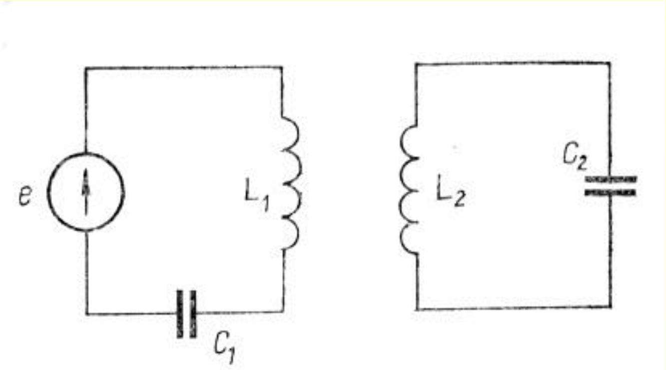
- $к_1$ и $к_2$ са коефициенти на предаване на напрежение от единия кръг в другия кръг, чрез елемента на връзката.

- U_{21m}- напрежението създадено от тока на кръг 1 върху елемента на връзка, ако кръг 2 е прекъснат.

- U_{1m} - е общият пад на напрежението в кръг 1, включително върху елемента за връзка

9. Трептящи кръгове

Аналогично определяме величините в $к_2$



- Пример на индуктивно свързани кръгове:

$M = \sqrt{L_1 L_2}$ -максимален коефициент на взаимна индукция, когато цялото магнитно поле от L_1 преминава през L_2.

Когато цялата енергия е съсредоточена в бобината L_1 и тече ток I_{1m} *, пада върху кондезатора е нула*:

$$U_{21m} = \omega M I_{1m}, \quad U_{1m} = \omega L_1 I_{1m}, \quad U_{12m} = \omega M I_{2m}, \quad U_{2m} = \omega L_2 I_{2m}$$

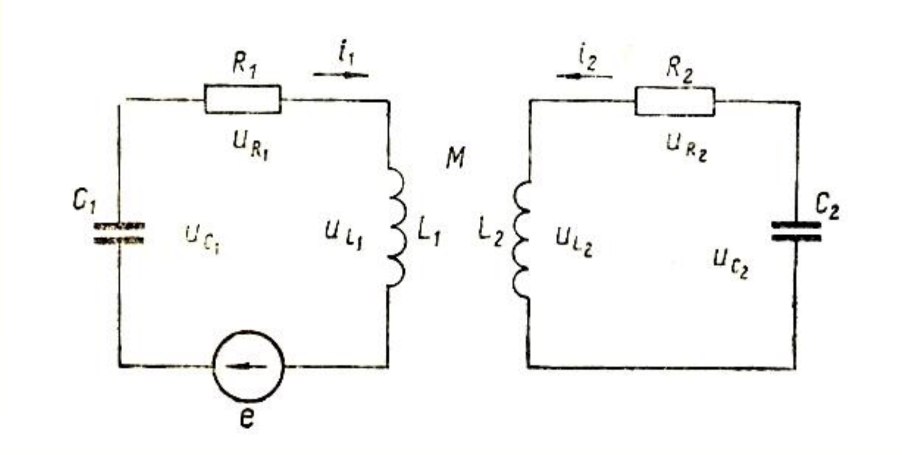
$$k_1 = \frac{M}{L_1}, k_2 = \frac{M}{L_2} \;\; и \;\; k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1,$$

9. Трептящи кръгове

- Коефициента на връзката обикновено е по-малък от единица:

  - *к < 0.01 – много слаба връзка*
  - *к = 0.01 – 0.05 слаба връзка*
  - *к = 0.05 – 0.9 силна връзка*
  - *к > 0.9 – много силна*

- Принудени трептения в индуктивно свързани кръгове



Токът течащ през първия кръг индуцира ЕДН във втория кръг, а токът на втория кръг ЕДН в първия кръг.

$$e_{21} = -M\frac{di_1}{dt}, \quad e_{12} = -M\frac{di_2}{dt}$$

9. Трептящи кръгове

- Връзката между двата кръга се определя от коефициента на взаимна индукция *M*.

-Токовете i_1 и i_2 се определят не само от електродвижещото напрежение и параметрите на кръговете, но и от взаимната индукция между двата кръга (от коефициента на връзка).
- От 2-рия закон на Кирхоф може да се запишат уравненията:

$$\dot{U}_{R_1} + \dot{U}_{L_1} + \dot{U}_{C_1} = \dot{E} + e_{12}$$

$$\dot{U}_{R_2} + \dot{U}_{L_2} + \dot{U}_{C_2} = e_{21}$$

9. Трептящи кръгове

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_1 + \dfrac{\omega^2 M^2}{\dot{Z}_2}} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_{11}}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_{20}}{\dot{Z}_2 + \dfrac{\omega^2 M^2}{\dot{Z}_1}} = \frac{\dot{E}_{20}}{\dot{Z}_{22}}$$

индуцираното напрежение във втората бобина.

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = X_1, \quad R_1 + jX_1 = \dot{Z}_1$$

Комплексен импеданс на 1 кръг

$$\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = X_2, \quad R_2 + jX_2 = \dot{Z}_2$$

Комплексен импеданс на 2 кръг

9. Трептящи кръгове

- По отношение на източника на ЕДН система от два трептящи кръга може да се разглежда като един трептящ кръг с еквивалентно съпротивление

$$\dot{Z}_{11} = \dot{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\dot{Z}_2} = R_1 + jX_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2{}^2 + X_2{}^2}(R_2 - jX_2) =$$

$$= R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_2{}^2} R_2 + j\left(X_1 - \frac{\omega^2 M^2}{Z_2{}^2} X_2 \right) = R_{11} + jX_{11}$$

- Активната съставна на еквивалентното съпротивление е:

$$R_{11} = R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_2{}^2} R_2$$

активно съпротивление на първия кръг

вносимо (приведено) активно съпротивление

9. Трептящи кръгове

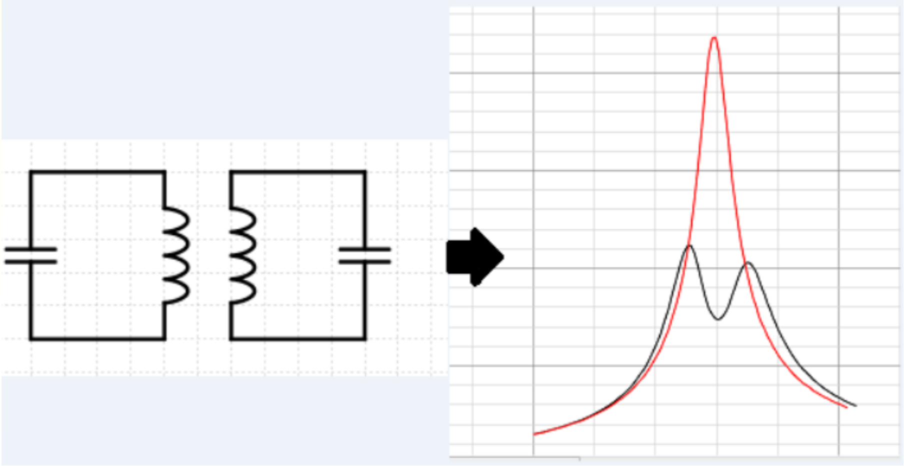
- Рективната съставна на еквивалентното съпротивление е:

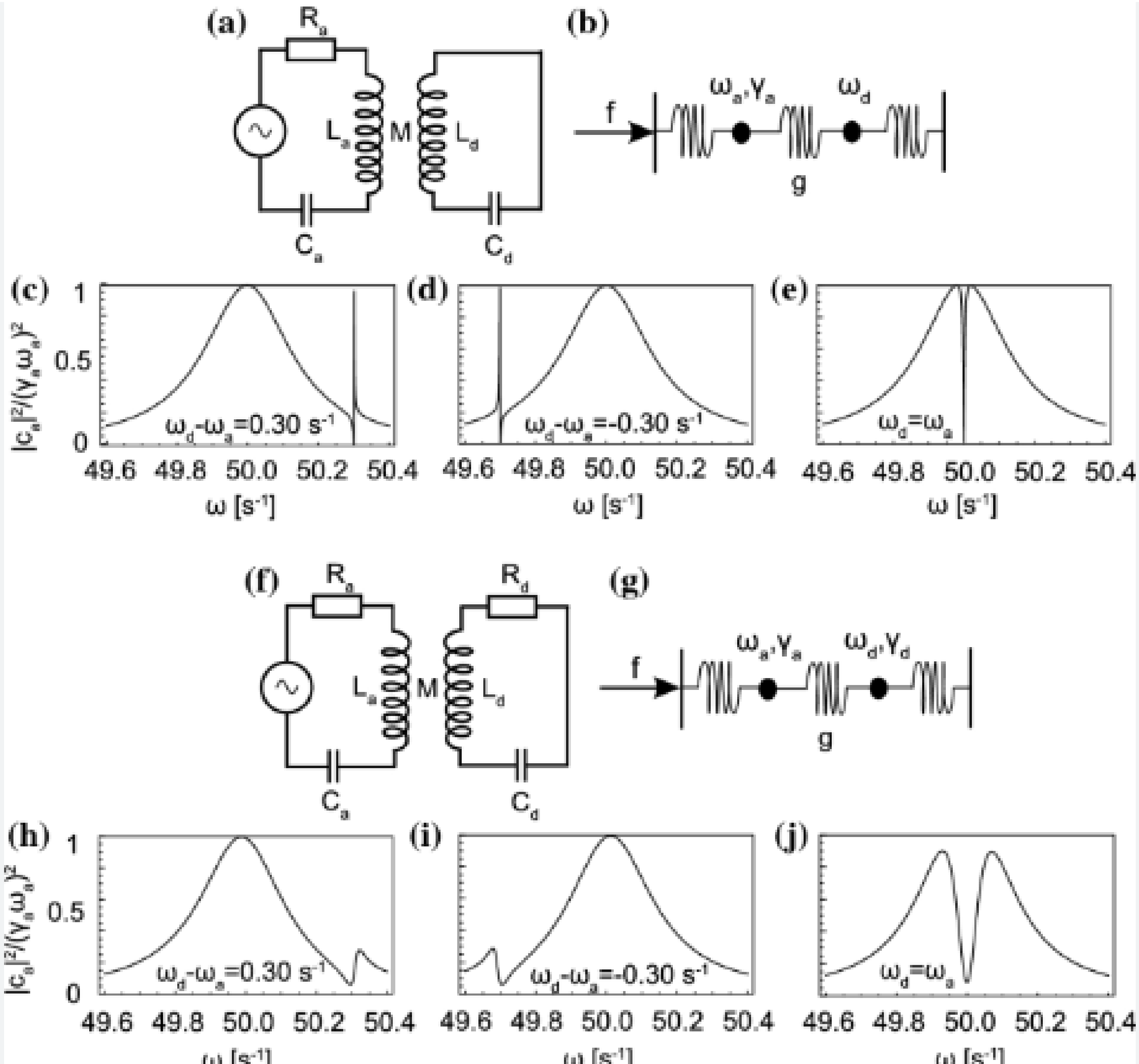
$$X_{11} = X_1 + \frac{\omega^2 M^2}{{Z_2}^2} X_2$$

реактивно съпротивление на първия кръг

вносимо (приведено) реактивно съпротивление

- Приведеното активно съпротивление винаги увеличава загубите на еквивалентния кръг, общото реактивно съпротивление може да се увеличи, може да намалее, а може да бъде и нула.





(a)
R_a
L_a
M
L_d
C_a
C_d
(b)
f
ω_a, γ_a
ω_d
g
(c)
(d)
(e)
$|c_a|^2/(\gamma_a\omega_a)^2$
$\omega_d-\omega_a=0.30\ s^{-1}$
$\omega_d-\omega_a=-0.30\ s^{-1}$
$\omega_d=\omega_a$
$\omega\ [s^{-1}]$
(f)
R_a
R_d
L_a
M
L_d
C_a
C_d
(g)
f
ω_a, γ_a
ω_d, γ_d
g
(h)
(i)
(j)
$|c_a|^2/(\gamma_a\omega_a)^2$
$\omega_d-\omega_a=0.30\ s^{-1}$
$\omega_d-\omega_a=-0.30\ s^{-1}$
$\omega_d=\omega_a$
$\omega\ [s^{-1}]$