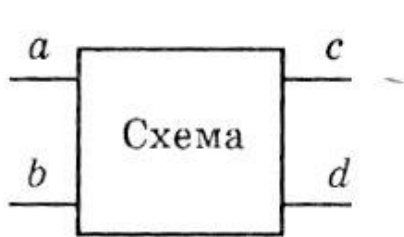


8. Четириполюсници

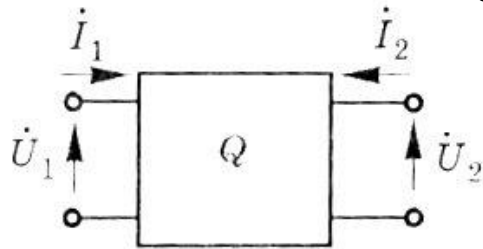
1. Определение

Електрическа схема или част от нея с четири извода се нарича четириполюсник.



- a, b се свързват към източника и се наричат “входни”
- c, d се свързват към товара и се наричат “изходни”

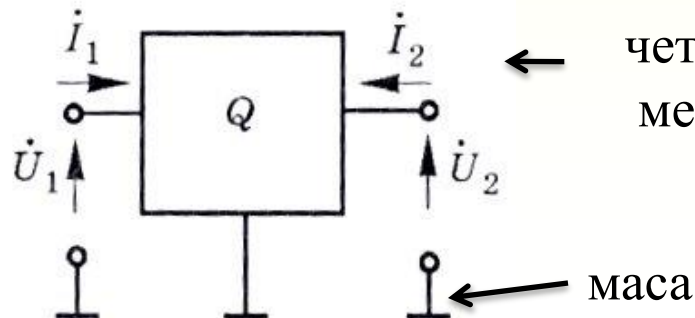
Четириполюсника извършва необходимите промени в електричния сигнал – амплитуда, мощност, честотен спектър.



- \dot{I}_1 и \dot{I}_2 - входен и изходен ток (синусоиден или постоянен)
- \dot{U}_1 и \dot{U}_2 - входно и изходно напрежение (синус. или пост.)

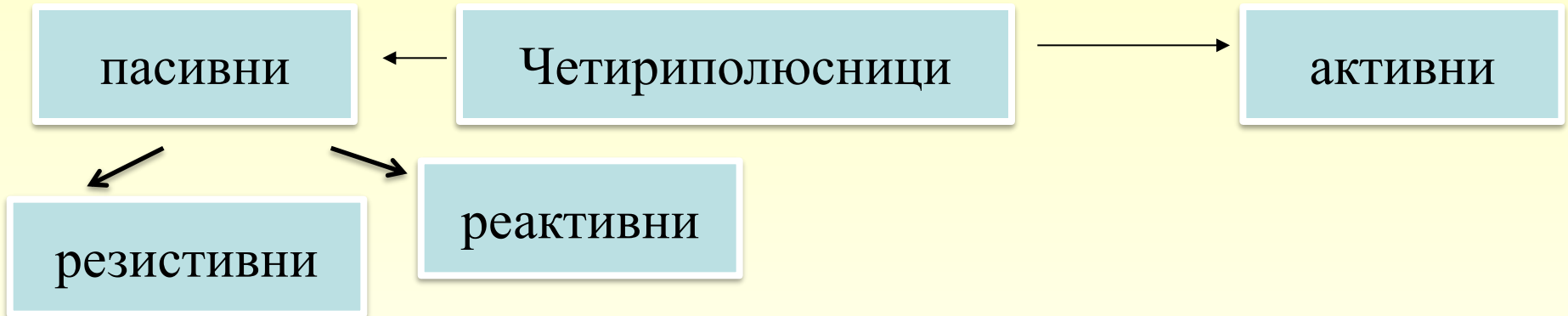
← четитириполюсници (триполюсници) общ извод (маса) между входа и изхода.

- многополюсници – схеми с повече от 4 извода



8. Четириполюсници

2. Видове четириполюсници



Линейни четириполюсници – съдържат само пасивни елементи и не променят формата на сигнала при установен режим.

Връзката между изходните (U_2, I_2) и входните (U_1, I_1) величини се описва от :

- линейни алгебрични уравнения (резистивни четириполюсници),
- линейни диференциални уравнения (реактивни четириполюсници).

Нелинейни четириполюсници – съдържат нелинейни елементи, които променят формата (спектъра) на сигнала

8. Четириполюсници

3. Първични параметри на линеен четириполюсник

$F(\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{I}_1, \dot{I}_2) = 0$ представя се като 2 – уравнения

2- от величините се избират за **независими променливи**, 2- са **функции** на независимите променливи

Коефициентите на пропорционалност м/у U_i и I_i се наричат първични параметри на четириполюсника – те дават възможност да се анализира работата на четириполюсника без да се познава точната схема.

- При U_i и I_i – постоянни напрежение и ток – параметрите на четириполюсника са “постояннотокови”.
- При u_i и i_i – променливи напрежение и ток – параметрите са “променливотокови”.

8. Четириполюсници

3.1 Импедансни параметри

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \dot{I}_1, \dot{I}_2 - \text{независими параметри} \\ \dot{U}_1, \dot{U}_2 - \text{функции на } \dot{I}_1 \text{ и } \dot{I}_2 \end{array}$$

Във векторен вид тези уравнения се представят като:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{Z} - \text{импедансна матрица на четириполюсника}$$

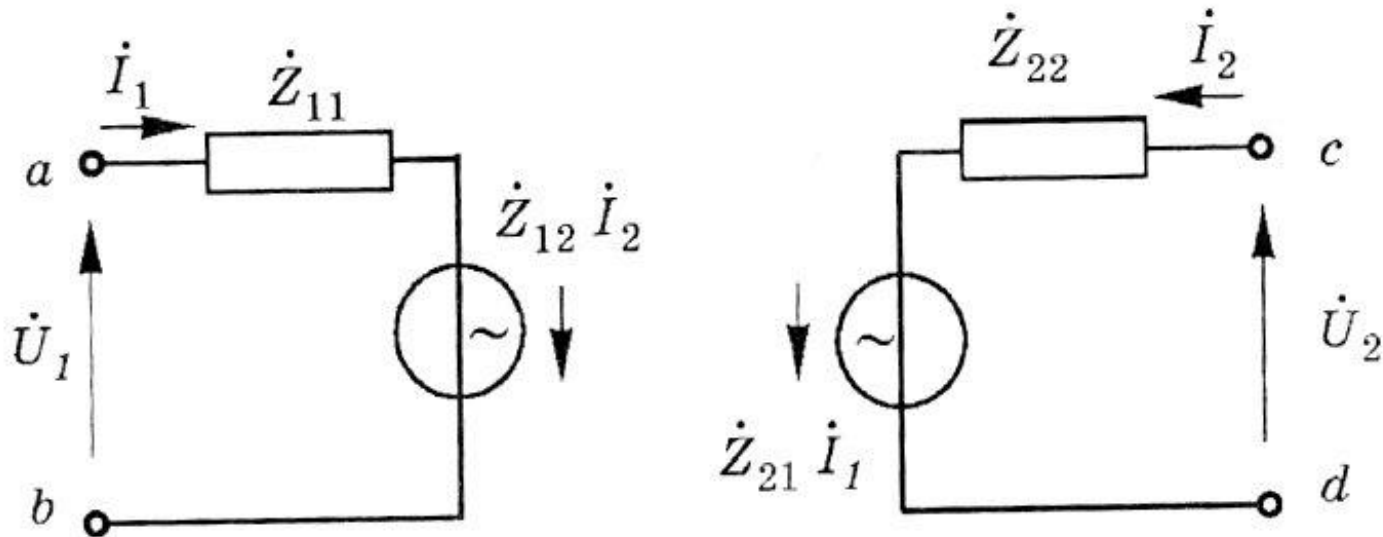
$$Z_{11} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 \quad \dot{I}_2 = 0 \quad \text{входен импеданс (съпротивление) при празен ход на изхода}$$

$$Z_{12} = \dot{U}_1 / \dot{I}_2 \quad \dot{I}_1 = 0 \quad \text{предавателен импеданс в обратна посока при празен ход на входа}$$

$$Z_{21} = \dot{U}_2 / \dot{I}_1 \quad \dot{I}_2 = 0 \quad \text{предавателен импеданс в права посока при празен ход на изхода}$$

$$Z_{22} = \dot{U}_2 / \dot{I}_2 \quad \dot{I}_1 = 0 \quad \text{изходен импеданс при празен ход на входа}$$

8. Четириполюсници



импедансна еквивалентна схема на четириполюсника.

- импедансните параметри описват работата на четириполюсника при ниска честота (до $\sim 100\text{kHz}$) на променливия ток. Постоянно-токовите параметри се наричат “съпротивителни” $-R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}$.

8. Четириполусници

3.2 Адмитансни параметри

$R = 1 / G \rightarrow G$ - активна проводимост $X = 1 / B \rightarrow B$ реактивна проводимост
susceptance

$Z = 1 / \dot{Y} \rightarrow \dot{Y} = G + jB$ - **адмитанс**

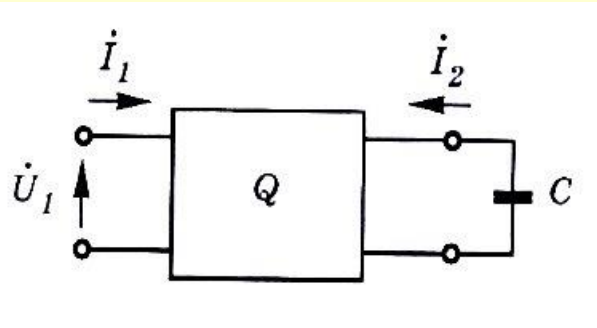
$$\dot{Y} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \left(\frac{R}{R^2 + X^2} \right) + j \left(\frac{-X}{R^2 + X^2} \right)$$

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{Y}_{11} \dot{U}_1 + \dot{Y}_{12} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = \dot{Y}_{21} \dot{U}_1 + \dot{Y}_{22} \dot{U}_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \dot{U}_1, \dot{U}_2 - \text{независими променливи} \\ \dot{I}_1, \dot{I}_2 - \text{функции на } \dot{U}_1 \text{ и } \dot{U}_2 \end{array}$$

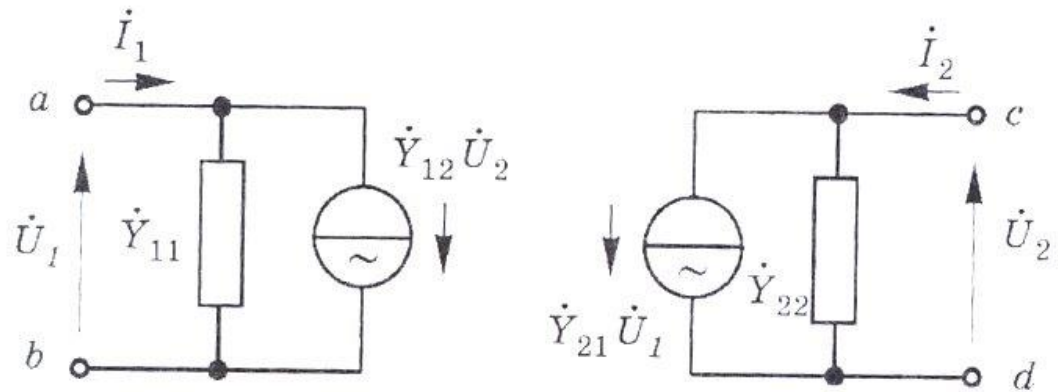
$$\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \dot{Y} \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} \quad \dot{Y} = \begin{pmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} \end{pmatrix} \quad - \text{адмитансна матрица}$$

- Адмитансните параметри се дефинират и използват за променлив ток с висока честота ($f > 10\text{-}100 \text{ MHz}$) ($300 \text{ MHz}\text{-}10 \text{ GHz}$)

8. Четириполусници



късо съед. на изхода



адмитансна еквивалентна схема

$\dot{Y}_{11} = \dot{i}_1 / \dot{U}_1 \big| \dot{U}_2 = 0$ - **входен адмитанс** при късо съединение на изхода

$\dot{Y}_{12} = \dot{i}_1 / \dot{U}_2 \big| \dot{U}_1 = 0$ - **предавателен адмитанс** в обратна посока при късо съединение на входа

$\dot{Y}_{21} = \dot{i}_2 / \dot{U}_1 \big| \dot{U}_2 = 0$ - **предавателен адмитанс** в права посока при късо съединение на изхода

$\dot{Y}_{22} = \dot{i}_2 / \dot{U}_2 \big| \dot{U}_1 = 0$ **изходен адмитанс** при късо съединение на входа

8. Четириполюсници

3.3 Хибридни (h) параметри

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{h}_{11} \dot{I}_1 + \dot{h}_{12} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = \dot{h}_{21} \dot{I}_1 + \dot{h}_{22} \dot{U}_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \dot{I}_1, \dot{U}_2 - \text{независими променливи} \\ \dot{U}_1, \dot{I}_2 - \text{функции на } \dot{I}_1, \dot{U}_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \hat{h} \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} \quad \hat{h} = \begin{pmatrix} \dot{h}_{11} & \dot{h}_{12} \\ \dot{h}_{21} & \dot{h}_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} - \text{хибридна матрица} \\ \text{на четириполюсника} \end{array}$$

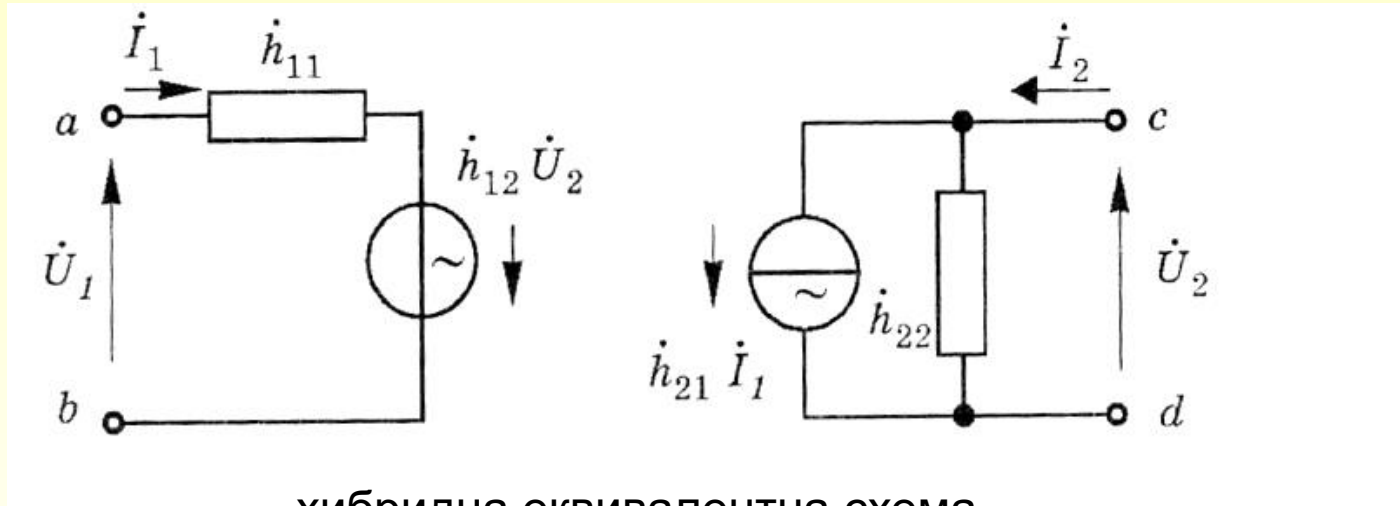
$$\hat{h}_{11} = \left. \dot{U}_1 / \dot{I}_1 \right|_{\dot{U}_2 = 0} \quad - \text{входен импеданс при късо съединение на изхода}$$

$$\hat{h}_{12} = \left. \dot{U}_1 / \dot{U}_2 \right|_{\dot{I}_1 = 0} \quad - \text{коефициент на обратно предаване по напрежение при празен ход на входа}$$

$$\hat{h}_{21} = \left. \dot{I}_2 / \dot{I}_1 \right|_{\dot{U}_2 = 0} \quad - \text{коефициент на предаване на ток при късо съединение на изхода}$$

$$\hat{h}_{22} = \left. \dot{I}_2 / \dot{U}_2 \right|_{\dot{I}_1 = 0} \quad - \text{изходен адмитанс при празен ход на входа}$$

8. Четириполусници



хибридна еквивалентна схема

- Практическо приложение – постояннотокови и променливотокови параметри при честоти до 10 MHz.

\dot{Z} , \dot{Y} , \dot{h} – параметрите не зависят от конкретния вид и елементи в схемата а характеризират нейната работа, затова се наричат първични параметри !

8. Четириполюсници

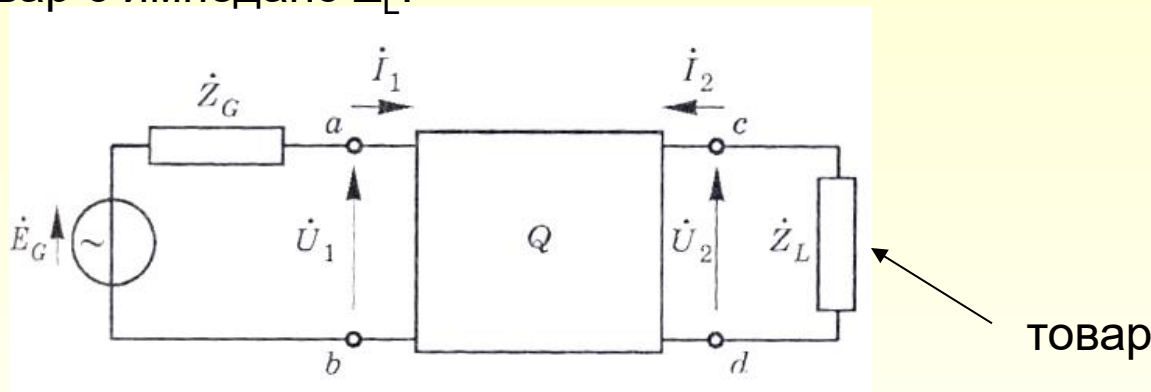
4. Вторични параметри

- ПСТОЯННОТОКОВИ

- ПРОМЕНЛИВОТОКОВИ

В работни условия на входа на четириполюсника е включен реален източник, а на изхода товар с импеданс Z_L .

Източник в
еквивалентна
схема на
Тевенен



4.1 Входен импеданс (входно съпротивление)

спрямо изводи а и б четириполюсника има поведение на двуполусник :

$$\dot{Z}_i = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 ,$$

като има фазова разлика между входното напрежение \dot{U}_1 и \dot{I}_1 .

$$\dot{Z}_i = \dot{Z}_{11} - \dot{Z}_{12} \cdot \dot{Z}_{21} / (\dot{Z}_L + \dot{Z}_{22}) \quad \text{- връзка със } Z \text{-параметрите и товара } Z_L$$

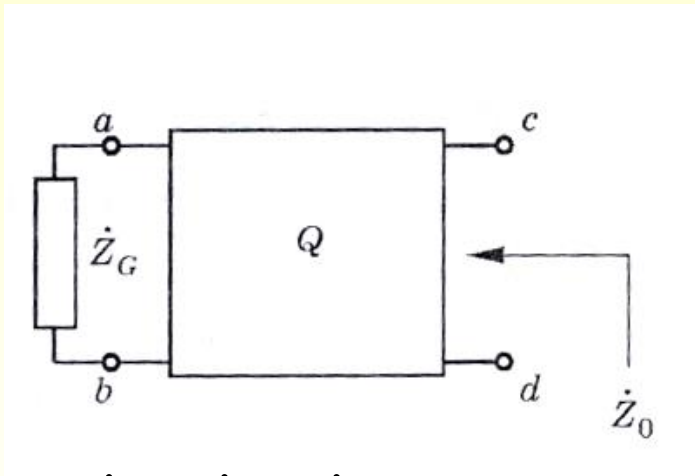
$$\dot{Z}_i = \dot{Z}_{11} \text{ празен ход} \quad Z_L \rightarrow \infty$$

8. Четириполюсници

4.2 Изходен импеданс – Z_0 между изводи c и d при накъсо даден източник E_G

$$\dot{Z}_0 = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$$

Накъсо даден източник на напрежение E_G



$$\dot{Z}_0 = \dot{Z}_{22} [1 - (\dot{Z}_{12} \cdot \dot{Z}_{21} / \dot{Z}_{11} \cdot \dot{Z}_{22})]$$

- връзка със Z- параметрите

8. Четириполюсници

4.3 Комплексен коефициент на предаване по напрежение

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_2(\omega)}{\dot{U}_1(\omega)}, K \leq 1$$

При $K > 1$ - комплексен коефициент на усилване

$$\dot{K} = \dot{K}_{oc} (Z_L \rightarrow \infty)$$

-Комплексен коефициент на предаване (усилване) при празен ход на изхода.

$$\dot{K}_r = \frac{\dot{U}_2}{\dot{E}_G} = \frac{\dot{K}_{oc}}{\left(1 + \frac{\dot{Z}_G}{\dot{Z}_i}\right) \left(1 + \frac{\dot{Z}_0}{\dot{Z}_L}\right)}$$

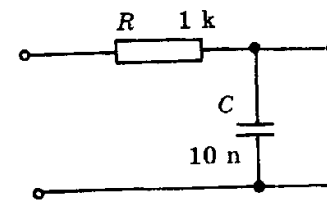
- Действителен комплексен коефициент на предаване (усилване) по напрежение.

$$K_{dB}(\omega) = 20 \lg K(\omega) (dB)$$

измерва се в децибели (dB)

Модулът (големината) на K , представен като функция на честотата $K(f)$, $K(\omega)$ се нарича АЧХ -Амплитудно-честотна характеристика

Пример: АЧХ и ФЧХ на филтър



a

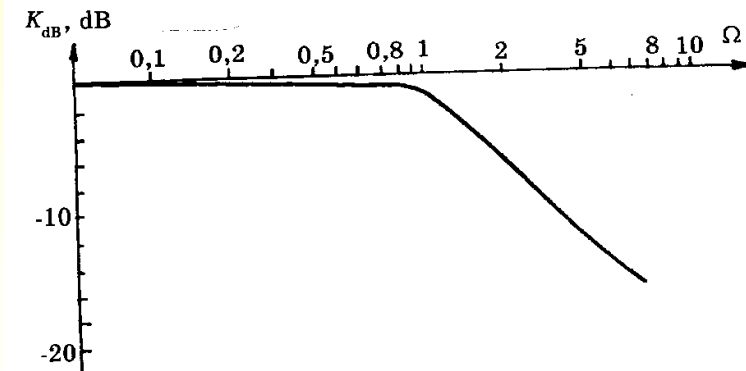
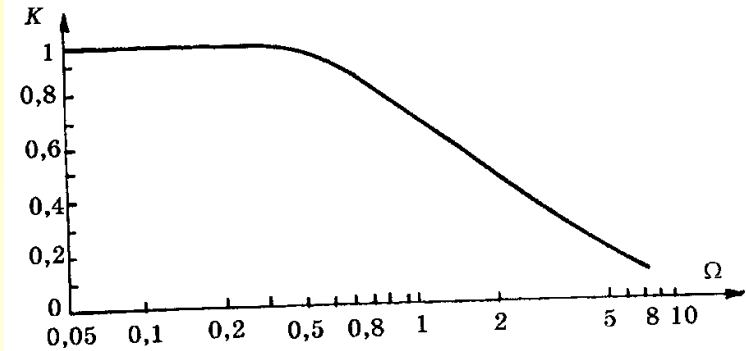
$$\dot{K} = \frac{\dot{U}_2(\omega)}{\dot{U}_1(\omega)} = \frac{U_{2m}(\omega)e^{j(\omega.t+\phi_2)}}{U_{1m}(\omega)e^{j(\omega.t+\phi_1)}}$$

$$= \frac{U_{2m}(\omega)}{U_{1m}(\omega)} e^{j(\phi_2 - \phi_1)}$$

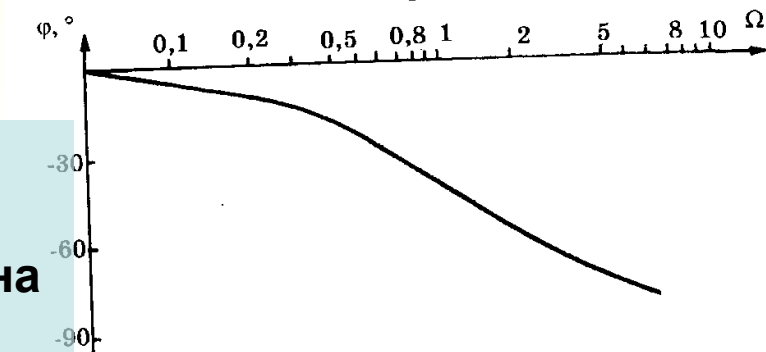
$$= K(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)}$$

$$K(\omega) = \frac{U_{2m}(\omega)}{U_{1m}(\omega)}, \quad \text{АЧХ}$$

$$\phi(\omega) = \phi_2(\omega) - \phi_1(\omega) \quad \text{ФЧХ}$$



б



Зависимостта на фазовата разлика $\phi(f)$, $\phi(\omega)$ м/у изходното и входно напрежение, като функция на честотата се нарича **Фазово-Честотна Характеристика**.

8. Четириполюсници

4.4 Комплексни коефициенти на предаване по ток и мощност

$$\dot{K}_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}, K \leq 1 \quad \text{комплексен коефициент на предаване(усилване)} \\ \text{по ток}$$

$$\dot{K} = \dot{K}_I \frac{\dot{Z}_L}{Z_i} \quad \text{връзка между коефициента на усилване по ток и} \\ \text{коефициента на усилване по напрежение}$$

$$K_P = \frac{P_2}{P_G}, K_{PdB} = 10 \lg K_P \text{ (dB)} \quad \text{Коефициент на усилване по мощност}$$

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \phi_2, P_G = E_G I_1 \cos \phi_G$$

$$K_P = K_r K_I \frac{\cos \phi_2}{\cos \phi_G}$$

Дадено е:

$$R = 3 \Omega, \quad L = 1 \text{ mH} = 0.001 \text{ H}, \quad u(t) = 10 \sin(4000t) \text{ V}.$$

Ъгловата честота е

$$\omega = 4000 \text{ rad/s}.$$

Индуктивното съпротивление е

$$X_L = \omega L = 4000 \cdot 0.001 = 4 \Omega.$$

Пълното съпротивление на последователната RL -верига е

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Omega.$$

Амплитудата на тока е

$$I_m = \frac{U_m}{|Z|} = \frac{10}{5} = 2 \text{ A}.$$

Ефективната стойност на тока е

$$I_{\text{еф}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1.41 \text{ A}.$$

Следователно

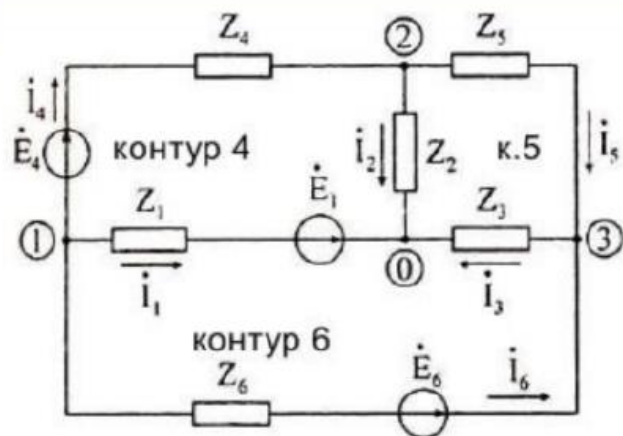
$$\boxed{I_{\text{еф}} \approx 1.41 \text{ A}}.$$

Зад.4 Последователно свързани $R=3 \Omega$, $L=1 \text{ mH}$ към източник на напрежение $u(t) = 10\sin(4000.t) \text{ (V)}$, Колко е ефективната стойност на тока $I = ? \text{ (A)}$

Задача: Определете токовете в следната схема

$E_1=15 \text{ V}$, $E_4=20 \text{ V}$, $E_6= 25 \text{ V}$, $Z_1=100$, $Z_2=200$, $Z_4=100$, $Z_3=400$,

$Z_5=150$, $Z_6=300 \Omega$. Напишете 6-те уравнения и посочете метода на изчисление.



2.1. Възлови уравнения

От схемата получаваме:

$$\begin{aligned} -I_1 - I_4 - I_6 &= 0, \\ -I_2 + I_4 - I_5 &= 0, \\ I_5 - I_3 + I_6 &= 0. \end{aligned}$$

2.2. Контурни уравнения

За контур 4:

$$-Z_1 I_1 + Z_2 I_2 + Z_4 I_4 = E_4 - E_1.$$

След заместване:

$$-100 I_1 + 200 I_2 + 100 I_4 = 5.$$

За контур 5:

$$-Z_2 I_2 + Z_3 I_3 + Z_5 I_5 = 0.$$

След заместване:

$$-200 I_2 + 400 I_3 + 150 I_5 = 0.$$

За контур 6:

$$-Z_1 I_1 + Z_3 I_3 + Z_6 I_6 = E_6 - E_1.$$

След заместване:

$$-100 I_1 + 400 I_3 + 300 I_6 = 10.$$

2.3. Матричен вид

Записваме системата като

$$A\mathbf{I} = \mathbf{b},$$

където

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -100 & 200 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 400 & 0 & 150 & 0 \\ -100 & 0 & 400 & 0 & 0 & 300 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

2.4. Решение по метода на Крамер

Главният определител е

$$\Delta = \det(A) = -120\,500\,000 \neq 0.$$

Тъй като $\Delta \neq 0$, системата има единствено решение и може да се реши по метода на Крамер.

Нека Δ_k е определителят, получен от Δ , като k -тата колона на матрицата A се замени с вектора на свободните членове \mathbf{b} . Тогава:

$$I_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad k = 1, 2, \dots, 6.$$

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2\,475\,000}{-120\,500\,000} = -\frac{99}{4820} \approx -0.02054 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-1\,450\,000}{-120\,500\,000} = \frac{29}{2410} \approx 0.01203 \text{ A},$$

$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-1\,025\,000}{-120\,500\,000} = \frac{41}{4820} \approx 0.00851 \text{ A},$$

$$I_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-650\,000}{-120\,500\,000} = \frac{13}{2410} \approx 0.00539 \text{ A},$$

$$I_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta} = \frac{800\,000}{-120\,500\,000} = -\frac{8}{1205} \approx -0.00664 \text{ A},$$

$$I_6 = \frac{\Delta_6}{\Delta} = \frac{-1\,825\,000}{-120\,500\,000} = \frac{73}{4820} \approx 0.01515 \text{ A}.$$